АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Академик Н. Н. ЛУЗИН

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ ДЕСКРИПТИВНОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА 1935 ЛЕНИНГРАД

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Непременный секретарь академик *В. П. Волгин*

Целью настоящего доклада является изложение результатов новых изысканий в области дескриптивной теории функций. Результаты эти составляют содержание работ, выполненных в течение 1934/35 академического года в отделе теории функций действительного переменного Математического института им. В. А. Стеклова при Академии Наук СССР. Работы эти были выполнены, частью мною лично, частью же уч. специалистом названного института доктором Петром Сергеевичем Новиковым. Результаты, полученные им, столь глубоки и сильны, что, собственно говоря, должны были бы составить содержание двух отдельных докладов сессии.

ТЕСНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ КОНСТИТУАНТ

1. *Происхождение проблемы.* Конституанты аналитических дополнений изучались внимательно в течение ряда лет. Работами как математиков СССР, так и Польши, были обнаружены чрезвычайные тонкость и сложность их строения, влекущие большое богатство свойств, касающихся их самих и их расположения. Из этих свойств в первую очередь упомянем о следующем.

Пусть $\mathcal{E}$ есть аналитическое дополнение, лежащее на оси OX. Мы предполагаем соответствующее ему аналитическое множество E заданным посредством решета C, лежащего на плоскости XOY и состоящего из счетного числа прямолинейных интервалов параллельных оси OX.

Пусть x есть какая-нибудь точка оси OX, P_x перпендикуляр в точке x к оси OX и R_x пересечение решета C с перпендикуляром P_x.

В этих условиях, если x принадлежит к E, множество R_x не есть вполне упорядоченное по отношению к положительному направлению оси OY; если же x входит в $\mathcal{E}$, множество R_x есть вполне упорядоченное и имеет вполне определенный тип γ_x.

Если мы через $\mathscr{E}_\alpha$ обозначим множество тех точек x, где $\gamma_x = \alpha$, то $\mathscr{E}_\alpha$ и есть „*α-ая конституанта*" аналитического дополнения $\mathscr{E}$. Конституанты эти дают место равенству

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots + \mathscr{E}_\omega + \ldots \mathscr{E}_\alpha + \ldots\ldots | \Omega, \qquad (1)$$

называемому „*разложением аналитического дополнения $\mathscr{E}$ по конституантам*".

Известно, что конституанта $\mathscr{E}_\alpha$ всегда измерима B. Известно также следующее важное свойство конституант $\mathscr{E}_\alpha$:

Каково бы ни было аналитическое, в частности измеримое B, множество точек H, лежащее на оси OX и содержащееся в $\mathscr{E}$, оно содержится целиком в сумме заведомо счетного числа конституант $\mathscr{E}_\alpha$.

Из этого предложения сразу же следует, что необходимым и достаточным условием для того чтобы аналитическое дополнение $\mathscr{E}$ было неизмеримо B, является существенная трансфинитность разложения (1), т. е. чтобы имелось несчетное число непустых конституант $\mathscr{E}_\alpha$ (иначе говоря, действительно содержащих точки). Таким образом, для того чтобы $\mathscr{E}$ было измеримым B, необходимо и достаточно, чтобы все конституанты $\mathscr{E}_\alpha$ были бы *пустые*, начиная с некоторого индекса β.

Большое математическое и философское значение имеет вопрос, который мы формулируем как „первую проблему":

Проблема I. *Узнать, существует или нет решето C такое, что всякая конституанта $\mathscr{E}_\alpha$ состоит из одной и только из одной точки?*

Философское значение этой проблемы состоит в том, что утвердительное решение ее ответило бы на важный вопрос о сравнимости мощности continuum'а c и мощности алеф-один ($\aleph_1$). До сих пор не только этот вопрос не разрешен, но еще неизвестно, в каком направлении вероятнее всего ожидать решения: с одной стороны, метод рассуждения математиков-идеалистов, состоящий в ничем не ограниченной свободе применения *аксиомы Zermelo*, дает множества *точек* мощности $\aleph_1$ и, значит, утверждает сравнимость c и $\aleph_1$ в смысле

$$c \geqslant \aleph_1.$$

С другой же стороны, наблюдение математиков-реалистов говорит о том, что до сих пор ни одному математику еще не удалось открыть индивидуального множества *точек*, имеющего мощность $\aleph_1$, что до сих пор *все* математические процессы, приводящие к индивидуальным множествам *точек*, давали лишь несчетные множества, имеющие *совершенные* части, и что еще ни один раз не удалось образовать *множества-индивида* точек, имеющего мощность $\aleph_1$. Исходя из этого, они выражают свое мнение, что не только „до сих пор“, но и „всегда“ так будет и что, следовательно, не существует множеств-индивидов *точек* мощности $\aleph_1$. И так как неравенство $c \geqslant \aleph_1$ они понимают лишь в смысле наличия в континууме части-индивида мощности $\aleph_1$, то отсюда они и выводят свой тезис о несравнимости c и $\aleph$.

Математическое значение этой проблемы состоит в том, что обладание множеством-индивидом точек мощности $\aleph_1$ доставило бы возможность построения других множеств и функций с самыми разнообразными свойствами, до сих пор еще не установленными ни для одной функции-индивида или множества-индивида точек.

Ввиду сказанного было бы чрезвычайно важным *утвердительное решение* проблемы I. Но и *отрицательное решение* ее было бы также весьма важным, потому что это значило бы, что всякое несчетное аналитическое дополнение $\mathcal{E}$ всегда имеет конституанту $\mathcal{E}_\alpha$, по крайней мере, с двумя точками. И в таком случае самый *механизм доказательства* этого предложения о наличии $\mathcal{E}_\alpha$, по крайней мере, с двумя точками позволил бы вывести нечто большее: наличие конституанты $\mathcal{E}_\alpha$ с несчетным числом точек, т. е. с *совершенным ядром*.

О значении же этого мы скажем при рассмотрении следующих проблем.

К сожалению, проблема I не поддается при настоящем состоянии науки никаким усилиям и это по причинам, которые трудно понять.

При таком положении вещей, естественно, искать *ослабить* проблему I, заменив ее такою, более слабой:

Проблема II. *Узнать, существует или нет решето C такое, что всякая конституанта $\mathcal{E}_\alpha$ есть, самое большое, счетная?*

Философское значение этой проблемы состоит в том, что всякое до сих пор построенное множество-индивид точек есть: *или* конечное, *или* счетное, *или* содержащее совершенное ядро. И так как в силу теоремы Cantor — Bernstein'а всякое множество точек, содержащее совершенное ядро, приводится эффективным образом в взаимно-однозначное соответствие со всеми точками оси OX, то отсюда следует, что до сих пор мы из несчетных множеств точек знаем лишь множества, имеющие эффективную мощность continuum'а. Математики-реалисты утверждают, что и всегда так будет, т. е. что среди множеств-индивидов точек нет несчетного множества без совершенного ядра, и что, следовательно, самый акт установления несчетности, по существу, есть тот же самый, которым устанавливается несчетность точек отрезка, потому что совершенное множество *подобно* отрезку (с утратой самое большое, счетного числа точек). Если бы это оказалось действительно так, это было бы своеобразным решением знаменитой *проблемы continuum'а*, потому что показывало бы, что мощность continuum'а есть *непосредственно большая счетной*, потому что множества промежуточного, т. е. не конечного, не счетного, и несчетного без совершенного ядра иметь (индивидуальным образом) невозможно.

Математическое значение этой проблемы состоит в том, что наличие аналитического дополнения $\mathscr{E}$ несчетного и без совершенного ядра позволило бы построить индивидуальным образом бесчисленные случаи функций и множеств-индивидов с самыми парадоксальными свойствами, которых сейчас нет ни у одного множества, и функции индивида. Но еще важнее — это то, что при *утвердительном ответе* („такое решето есть") на проблему II было бы построено множество-индивид, относительно которых можно было бы, употребив аксиому Zermelo, доказать, что оно мощности $\aleph_1$; употребление аксиомы Zermelo здесь было бы своеобразным, так как оно потребовалось бы не для построения множества (потому что оно было бы индивидуально определено решетом C), а лишь для обнаружения некоторого его свойства. И столь важным был бы отрицательный ответ („такого решета нет") на проблему II, потому что это значило бы, что всякое несчетное аналитическое дополнение $\mathscr{E}$ обладает несчетной конституантой $\mathscr{E}_\alpha$ и, значит, содержащей совершенное ядро, так как вообще всякое несчетное множество измеримое B содержит совершенное ядро. Поэтому тогда аналитические дополнения имели бы такое же точно свойство, как и множества *измеримые* B или *аналитические множества*: быть или самое большое счетным, или обладать совершенным ядром.

К сожалению, мы столь же далеки от какого бы то ни было решения проблемы II, как и проблемы I. При настоящем состоянии науки мы не имеем ни малейших указаний на вероятность решения проблемы II в том или другом направлении.

Это дает мысль заменить проблему II еще более слабою проблемою:

Проблема III. *Узнать, существует или нет решето* C *такое, что всякая конституанта* $\mathscr{E}_\alpha$ *есть множество измеримое* B *класса не выше чем некоторое фиксированное число* К?

Смысл этой проблемы следующий: множества измеримые B делятся на классы: *класс* 0, *класс* 1,..., *класс* ω,..., *класс* α, ... Ω.

Счетные множества суть множества измеримые B классов $\leqslant 2$. И если имеется такая трудность, превосходящая наши силы, для того чтобы получить решето C, дающее счетные конституанты, то, спрашивается, будет ли трудность столь же значительной для получения решета C, дающего хотя бы и несчетные конституанты $\mathscr{E}_\alpha$, но зато ограниченных классов, напр. не превышающих данного числа К? И если бы такое решето удалось найти, спрашивается, не удалось ли бы, видоизменив его, получить решето C, решающее утвердительно проблему II или даже проблему I?

Таким образом, интерес проблемы III есть интерес *механизма* утвердительного ее решения. Но и само по себе положительное решение ее имеет чрезвычайный научный и философский интерес, так как никому еще не удалось до сих пор найти не только $\aleph_1$ *точек*, но и $\aleph_1$ множеств *ограниченных классов*, т. е. меньших некоторого числа К. Отрицательное решение проблемы III означало бы, что классы конституант $\mathscr{E}_\alpha$ при всяком решете не ограничены, и, значит, заведомо имеется конституанта класса $\geqslant 3$. Но всякое множество, измеримое B класса $\geqslant 3$, содержит совершенное ядро. Это показывает, что отрицательное решение проблемы III влечет за собой решение проблемы II и I.

К сожалению, проблема III представляет те же самые трудности, как и проблемы II и I. Но здесь выступает на сцену новый момент, которого не было в проблемах I и II: для тех было сразу ясным, что все решета, которые изучены до сих пор, оказываются имеющими несчетные конституанты $\mathscr{E}_\alpha$, раз аналитическое дополнение $\mathscr{E}$ несчетно. Этого обстоятельства вначале не было для проблемы III, так как долгое время о поведении конституант $\mathscr{E}_\alpha$ совсем ничего не было известно даже для самых простых решет C: зная, что для них имеются несчетные конституанты $\mathscr{E}_\alpha$, долгое время ничего не было известно о поведении их классов, т. е. о том, ограничены ли их классы или не ограничены.

Этот дополнительный вопрос к проблеме III был недавно решен проф. Серпинским и мною. Мы подвергли детальному обследованию один весьма важный класс решет (получающийся из пространственных универсальных решет при свертывании трехмерного пространства $ox'y'z'$ в плоскость xoz преобразованием Реано: $x'=\varphi(x)$, $y'=\psi(x)$, $z'=z$ и смогли установить, что классы конституант $\mathscr{E}_\alpha$ в этом случае *монотонно* возрастают до Ω, когда индекс α стремится к Ω.

Но при этом мы не могли обнаружить случаев решет C, когда классы конституант $\mathscr{E}_\alpha$, будучи не только не ограниченными, но и стремящимися к Ω как к пределу, были бы хотя бы немонотонно приближающимися к Ω. Тривиальный случай пустоты несчетного числа конституант $\mathscr{E}_\alpha$ нами, понятно, отбрасывался.

Такое положение вещей, естественно, заставляет отступить еще более назад и искать проблем еще более слабых, чем проблема III, в надежде встретиться не только со случаями решет, не обладающих свойством, требуемым проблемой, но и с решетом, уже имеющим это свойство.

Этот метод постепенного ослабления жесткости свойства, налагаемого на решето C, представляется целесообразным, так как в тот самый момент, когда указанное свойство будет уже настолько ослабленным, что допустит положительное решение — в этот самый момент можно будет понять характер трудности предыдущих проблем.

Одною из таких постепенно ослабляемых форм проблемы I является:

Проблема IV. *Узнать, существует или нет решето C такое, что все его конституанты $\mathcal{E}_\alpha$ могут быть соответственно заключены в не перекрывающиеся попарно множества H_α ограниченных классов?*

В этой проблеме не требуется нисколько ограниченность классов самих конституант: класс конституанты $\mathcal{E}_\alpha$ может, вместе с индексом α, возрастать до Ω; здесь требуется лишь ограниченность классов множеств-покрышек H_α, отделяющих конституанты $\mathcal{E}_\alpha$ одну от другой.

Конституанты решета C, не допускающие наличия таких покрышек, следует рассматривать как представляющие *чрезвычайно тесное расположение.*

К сожалению, проблема IV, видимо, еще недостаточно ослаблена, чтобы стало возможным ее *положительное решение,* пользуясь известными сейчас методами. Напротив, исследование важнейшего класса решет обнаруживает, что *их конституанты как раз и представляют указанное тесное расположение.*

Но для того чтобы иметь этот результат, необходимо более детальное изучение конституант вообще и, в частности, изучение особого класса решет, дающих „пустые“ аналитические множества.

2. *Определения.* Множество называется *пустым,* когда оно не содержит ни одного элемента. Пустое аналитическое множество измеримо B. Поэтому решето C, определяющее пустое аналитическое множество, дает место разложению

$$(-\infty_1+\infty)=\mathcal{E}_0+\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2+\ldots+\ldots+\mathcal{E}_\omega+\ldots+\mathcal{E}_\alpha+\ldots \mid \beta$$

состоящему из *счетного* числа конституант.

Число β такое, что оно есть *наименьшее* из чисел β', для которых конституанты $\mathcal{E}_{\beta'}, \mathcal{E}_{\beta'+1} \ldots\ldots \mid \Omega$ суть пустые, называется *степенью решета C.* Если степень β решета C есть число 1-го рода, т. е. если $\beta=\beta^*+1$, тогда конституанта $\mathcal{E}_{\beta^*}$ является последней непустой конституантой; в этом случае она называется *высшей конституантой.*

Решето C, составленное из прямолинейных интервалов параллельных оси OX и находящихся в счетном (или конечном) числе, называется *вполне упорядоченным,* если его проекция на ось OY есть вполне упорядоченное множество.

Тип γ проекции вполне упорядоченного решета C на ось OY называется *типом решета* C. Ясно, что имеем

$$\beta \leqslant \gamma + 1$$

Таким образом, для случая вполне упорядоченного решета типа γ нумер β^* высшей конституанты не может превысить γ.

Первой и важнейшей задачей является определение природы конституанты $\mathscr{E}_\gamma$ в случае вполне упорядоченного решета типа γ.

3. *Обозначения трансфинитных чисел.* Известно, что если a и β суть какие-нибудь трансфинитные числа такие, что $\beta \leqslant a$, то существует одно и только одно трансфинитное число γ (или конечное), которое удовлетворяет равенству $a = \beta + \gamma$. В этом случае мы условливаемся писать

$$\gamma = a - \beta$$

это обозначение удобно и естественно. Мы должны предупредить, что оно расходится с обычной манерой писать для трансфинитного числа a первого рода его непосредственно предшествующее число в виде $a-1$. Эту последнюю привычку мы считаем за *психологический недосмотр.* С вводимым нами обозначением мы всегда имеем равенство $a - 1 = a$ для всякого *трансфинитного* числа a.

Известно далее, что всякое трансфинитное число a может быть написано в виде

$$a = \omega\bar{a} + \nu,$$

где ν есть конечное число. Условимся писать

$$\bar{a} = \frac{a}{\omega}.$$

Этот символ имеет смысл в том и только в том случае, когда $a \geqslant \omega$.

Известно, наконец, что всякое трансфинитное число a может быть изображено в виде

$$a = \omega^{\bar{a}} + \omega^{\bar{a}_1} + \omega^{\bar{a}_2} + \ldots\ldots + \omega^{\bar{a}_k}$$

где $\bar{a} \geqslant \bar{a}_1 \geqslant \bar{a}_2 \ldots \geqslant \bar{a}_k$, и где целое k положительное (конечное) число.

Условимся писать

$$\bar{a} = \log_{\omega} a$$

или просто

$$\bar{a} = \log a.$$

Это обозначение оправдывается очевидным равенством:

$$\log(\alpha\beta) = \log\alpha + \log\beta$$

и еще тем, что

$$\lim\left(\frac{\alpha}{\omega} - \log\alpha\right) = \Omega$$

когда α возрастает *трансфинитно*, т. е. когда $\lim\alpha = \Omega$.

4. ***Оценка высшей конституанты.*** **Для того чтобы выполнить оценку этой конституанты, необходимо напомнить** классификацию множеств измеримых B, сделанную Vallée Poussin'ом.

Классификация эта такова:

$$K_0, K_1, K_2, \ldots, K_\omega, \ldots, K_\alpha, \ldots \ldots | \Omega,$$

где за основной класс принимается семейство множеств, каждое из которых состоит из суммы порций иррациональных чисел, как и дополнительное к нему множество (рациональные точки предполагаются удаленными). За производящую операцию принимается переход к пределу lim.

Доказывается, что ни один из классов не есть пустой. Полезно ввести следующее определение и обозначение: множество E класса K_α называется *достижимым сверху*, если оно есть общая часть множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n \ldots$ классов K_α предшествующих классу K_α, т. е. если $\alpha' < \alpha$. Для множества E, которое есть *или* класса $< \alpha$, *или* достижимое сверху класса α, будем писать знак равенства-неравенства:

$$E \leqslant \operatorname{Sup} \alpha.$$

Вот, теперь предложение, выполняющее оценку высшей конституанты $\mathcal{E}_\gamma$ для вполне упорядоченного решета C типа γ:

Теорема. *Всякое вполне упорядоченное решето C типа γ имеет конституанту $\mathcal{E}_\gamma$, удовлетворяющей условию:*

$$E_\gamma \leqslant \operatorname{Sup}\,[(2\log\gamma + 1) - 1].$$

И обратное также верно: всякое множество $\mathcal{E}_\gamma$, произвольно заданное и удовлетворяющее этому равенству-неравенству, *есть высшая конституанта вполне упорядоченного решета типа* γ, *надлежаще подобранного.*

5. *Тесное расположение конституант.* Рассмотрим универсальное решето U, находящееся в трехмерном пространстве $OXYZ$. Мы предполагаем, что U составлено из счетного числа плоских множеств класса 0, лежащих на плоскостях, параллельных горизонтальной плоскости XOY. Такое решето пересекается всякой плоскостью $y = y_0$ по плоскому решету U_{y_0}, составленному из линейных множеств класса 0 параллельных оси OX, и важно заметить, что *всякое* плоское решето, состоящее из линейных множеств класса 0 в счетном числе параллельных оси OX может быть получено таким образом. Заметим, что мы, понятно, предполагаем элементы всех решет лежащими на прямых или на плоскостях, пересекающих вертикальную ось в *рациональных* точках.

Пусть $\breve{E}$ есть аналитическое множество, определенное решетом U и $\breve{\mathscr{E}}$ его дополнение. Мы имеем разложение:

$$\breve{\mathscr{E}} = \breve{\mathscr{E}}_0 + \breve{\mathscr{E}}_1 + \breve{\mathscr{E}}_2 + \ldots + \breve{\mathscr{E}}_\omega + \ldots + \breve{\mathscr{E}}_\alpha + \ldots\ldots | \Omega \quad (3)$$

по конституантам.

Мы теперь утверждаем, что разложение (3) как раз и дает *тесное расположение конституант.* Действительно, если бы имелась трансфинитная последовательность плоских множеств классов $< \beta$

$$\breve{H}_0, \breve{H}_1, \breve{H}_2, \ldots, \breve{H}_\omega, \ldots \breve{H}_\alpha \ldots\ldots | \Omega$$

не имеющих попарно общих точек и таких, что $\breve{H}_\alpha$ содержит конституанту $\breve{\mathscr{E}}_\alpha$, то плоскость $y = y_0$ разрезала бы множества $\breve{H}_\alpha$ по линейным множествам $(\breve{H}_\alpha)_{y_0}$ классов $< \beta$, отделяющих друг от друга линейные конституанты

$$(\breve{\mathscr{E}}_0)_{y_0}, (\breve{\mathscr{E}}_1)_{y_0} \ldots (\breve{\mathscr{E}}_\omega)_{y_0} \ldots (\breve{\mathscr{E}}_\alpha)_{y_0} \ldots\ldots | \Omega$$

определяемые решетом U_{y_0}.

Но среди решет U_{y_0} имеются всевозможные вполне упорядоченные решета. И, в частности, среди таковых имеются решета типа γ с высшей конституантой $(\breve{\mathscr{E}}_\gamma)_{y_0}$ класса в точности равного

$$(2 \log \gamma + 1) - 1.$$

Эта высшая конституанта, являясь последней, должна совпадать с покрывающим ее множеством $(\breve{H}_\alpha)_{y_0}$, что невозможно, так как выражение $(2\log\gamma+1)-1$ превысит число β при достаточно великом γ.

Таким образом, разложение (3) есть разложение с тесными конституантами.

Чтобы иметь *плоское* решето C, определяющее разложение с тесными конституантами, достаточно свернуть пространство $OXYZ$ в плоскость $X'OZ'$ преобразованием Реано

$$x=\varphi(x'),\ \ y=\psi(x'),\ \ z=z'.$$

Тогда пространственное универсальное решето U будет свернуто в плоское решето C, дающее тесно расположенные конституанты.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМ

6. *Идеи J. Drach'a.* Невозможно при настоящем состоянии науки понять истинную причину трудности поставленных проблем. Вероятнее всего, эту трудность следует отнести за счет какой-то неопределенности понятия, выражаемого символом „Ω“, и одновременно за счет аналогичной неопределенности понятия „все точки континуума“. Но полное разъяснение сущности этой неопределенности еще не по силам современной науке.

Возьмем в качестве образца проблему II о *существовании или несуществовании решета C, определяющего аналитическое дополнение неизмеримое B с одними только счетными конституантами.*

Наша точка зрения состоит в том, что проблемы такого рода заставляют отказаться от традиционного взгляда на смысл слов: „решение проблемы“.

Обычно под словами: „решить проблему“ имеют в виду составление такой счастливой комбинации формальных алгебраических приемов и средств абстрактной логики, которая позволила бы, *или* сказать — „вот нужное решето“, *или* вывести из наличия такого решета словесное противоречие. Но известно, что несмотря на все усилия никто не смог до сих пор ни получить нужное решето, ни притти к формальному противоречию.

В настоящий момент я рассматриваю как невозможное удержание за словами: „решение проблемы" их обычного традиционного смысла. Указанная неопределенность понятий „Ω" и „continuum" делают, по нашему мнению, то, что мы оказываемся в категорической необходимости дать этим словам другой смысл, не становясь, впрочем, на почву идей Hilbert'a о „не противоречивом", которая мне кажется мало счастливой.

В качестве исходной точки зрения я беру идеи I. Drach'a об алгебраических числах. Известно, что под *алгебраическим числом* разумеется корень неприводимого алгебраического уравнения с *целыми коэфициентами*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (A)$$

J. Drach рассматривает алгебраическое число как „идеальное число" и вводит для обозначения этих идеальных чисел символ

$$(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n).$$

Самое важное в идеях J. Drach'a есть то, что идеальные числа нам никогда не даны прямо; мы не можем их фактически достигнуть, „коснуться их" в действительности (следуя удачному выражению E. Borel'я).

Они нам даны лишь *посредством* уравнения (A), и, значит, посредством символа J. Drach'a. И если мы можем еще говорить о „сумме", „разности", „произведении" и „частном" идеальных чисел, то никто не должен обманываться на этот счет: производя над идеальными числами указанные арифметические операции, в действительности оперируют исключительно лишь с *целыми* числами, выводя из нескольких символов J. Drach'a $(a_0^i, a_1^i, a_2^i \ldots a_n^i)$ единый окончательный символ $(a_0, a_1 \ldots a_n)$.

И точно так же, как позволено J. Drach'y говорить об идеальных числах, писать их в виде совершенно определенных конечных символов и рассуждать над ними, точно так же мы считаем себя в праве говорить *об идеальных аналитических дополнениях*[1] неизмеримых B и со счетными

[1] Прилагательное „идеальный" не имеет ничего общего ни с какой философской системой. В равной мере „идеальными" могут быть названы фильтрующиеся вирусы или бактериофаги, потому что они невидимы, но

конституантами и рассуждать над ними, не боясь никакого формального противоречия, не могущего притти в силу указанной неопределенности понятий „Ω“ и „continuum“.

Вопрос на этом пути сводится лишь к *выбору символа*, который мог бы описать так же хорошо какую-нибудь совокупность „идеальных аналитических дополнений“, как символ J. Drach'а $(a_0, a_1, a_2 \ldots a_n)$ описывает совокупность „идеальных чисел“, определенных алгебраическим уравнением (A).

7. *Универсальные и полууниверсальные плоские аналитические дополнения.* Как инструмент для создания такого символа может служить плоское универсальное аналитическое дополнение H.

Назовем *идеальным* линейное аналитическое дополнение неизмеримое B и со счетными (или конечными) конституантами. В противоположность этому все остальные линейные аналитические дополнения будут называться *реальными*; среди реальных аналитических дополнений мы различаем: (a) *содержащие совершенное множество* и (b) *счетные или конечные.*

Обозначим через H_p совокупность всех точек x_0 оси OX таких, что прямая $x = x_0$ пересекает плоское универсальное аналитическое дополнение H по линейным аналитическим дополнениям с совершенною частью. Точно так же обозначим чрез H_d совокупность точек x_0, для которых прямая $x = x_0$ пересекает множество H в счетных или конечных линейных множествах. Легко видеть, что оба множества H_p и H_d определены очень простой геометрической конструкцией.

Чтобы убедиться в этом, возьмем в пространстве трех измерений координатный триэдр $OXTY$ и поместим в плоскости XOY универсальное аналитическое дополнение H. Поместим в плоскости TOY универсальное множество P для всех линейных совершенных множеств; известно, что P может быть выбрано *измеримым* B. Сделав это, обозначим чрез CH плоское аналитическое множество, дополнительное

подчинены тем же самым операциям, как и обыкновенные видимые микробы. Идеальные числа J. Drach'а или идеальные числа Kummer'а в этом отношении подобны ультрамикробам.

к H, и чрез $\widetilde{CH}$ совокупность точек, лежащих на прямых, проведенных чрез точки множества CH параллельно оси OT. Точно так же обозначим чрез $\tilde{P}$ множество точек, лежащих на прямых, проведенных чрез точки множества P параллельно оси OX. Пусть $\widetilde{CH} \times \tilde{P}$ есть общая часть множеств $\widetilde{CH}$ и $\tilde{P}$. Ясно, что это есть пространственное аналитическое множество. Пусть π есть проекция его на плоскость XOT и $C\pi$ плоское дополнение множества π. Ясно, что $C\pi$ есть аналитическое дополнение, которого проекция на ось OX и есть наше множество H_p. Таким образом, H_p *дается геометрической конструкцией* и есть проективное множество типа A_2 (т. е. типа $PCPE$, где E измеримо B).

С другой стороны, поместим на плоскость XOY опять универсальное аналитическое дополнение H, а на плоскость TOY множество Q измеримое B, дающее при пересечении его прямыми параллельными оси OY только счетные (или конечные) множества и притом *все* такие множества; таким образом, множество Q есть *универсальное* по отношению к конечным и счетным множествам. Пусть $\widetilde{CH}$ есть множество точек, лежащих на прямых параллельных оси OT и проведенных чрез точки множества CH; аналогично $\tilde{Q}$ есть множество точек, лежащих на прямых параллельных оси OX и проведенных чрез точки множества Q. Ясно, что сумма $\widetilde{CH} + \tilde{Q}$ есть пространственное аналитическое множество. Поэтому формула $PCPC(\widetilde{CH} + \tilde{Q})$, где первая буква P означает проекцию на ось OX и вторая — на плоскость XOT, дает проективное множество типа A_3. Но, очевидно, что это множество и есть H_d. Таким образом, H_d *дается геометрической конструкцией и есть проективное множество типа* A_3.

Установив это, обозначим символом (H_p, H_d) совокупность точек оси OX, не принадлежащих ни к H_p, ни к H_d. Это суть *идеальные* точки прямой OX, и получают *все* идеальные линейные аналитические дополнения, рассекая множество H прямыми, параллельными оси OY и проведенными чрез точки множества (H_p, H_d).

Здесь мы должны считаться с возражением. Нам могут сказать: „Вы уничтожили на оси OX сначала все точки множества H_p, и затем все точки множества H_d. Но, если H_d есть *дополнение* к H_p, то, вот, на оси OX этим самым будут уничтожены все возможные точки, и, следовательно, совсем не останется никаких идеальных точек и вместе с ними идеальных аналитических дополнений".

Этот аргумент, по видимости, сильный, в действительности не может служить препятствием. В самом деле, если серьезным образом рассматривают H_d как дополнение к H_p, то нельзя забывать о том, что тип множества H_p есть A_2, и, значит, тип его дополнения должен быть CA_2; тип же множества H_d есть не CA_2, но A_3, и притом никакие попытки понизить его до типа CA_2 путем формальных преобразований самого определения множества H_d не увенчались успехом и, повидимому, не могут никогда быть успешными вследствие грубости и бедности формальных средств. Если же опасаются *неформальных* преобразований определения множества H_d, то тогда необходимо должны будут, выполняя такие преобразования, употребить, действительно, *все* точки прямой OX и среди них также и идеальные точки. Следовательно, *circulus vitiosus* в этом случае налицо. Я считаю, что не приходится бояться того, что кто-нибудь впоследствии придет к *формальному противоречию*, допустив, что H_p и H_d не суть взаимно дополнительные множества так же точно, как не приходится бояться того, что кто-нибудь впоследствии в один прекрасный день откроет, что математика противоречива.

Возвращаясь к существу дела, мы отмечаем, что точно так же, как в случае „идеальных чисел" J. Drach'a, мы можем рассматривать „идеальные" аналитические дополнения как определенные *формально* и описанные символом

$$(H_p,\ H_d)$$

таким образом, что всякая операция над идеальными аналитическими дополнениями есть в действительности не что иное, как просто операция над двумя совершенно реальными и вполне ясными геометрическими конструкциями, определяющими множества H_p и H_d. Напомним, что конструкции эти совершенно прозрачны, так как речь идет лишь о таких простых действиях, как составление суммы двух множеств, их пересечения, проектирование и взятие дополнения.

Такая точка зрения не представляется бесплодной, так как на этом пути встречаем такие вопросы, которые нельзя встретить при другом ходе рассмотрений.

В качестве простейшей иллюстрации возьмем понятие *полуниверсального* аналитического дополнения: таким именем мы называем такое плоское аналитическое дополнение H', которое всякой прямой $x = x_0$ пересекается по линейному аналитическому дополнению заведомо *либо* счетному (конечному), *либо* содержащему совершенное множество, причем всякое заранее данное такое линейное аналитическое дополнение может быть получено рассечением H' надлежаще подобранной прямой $x = x_0$.

Для того, чтобы иметь *полуниверсальное* аналитическое дополнение H', достаточно взять триэдр $OXTY$, построить на плоскости XOY универсальное аналитическое дополнение H, построить на плоскости TOY множество P измеримое B и универсальное по отношению всех линейных совершенных множеств. Пусть $\breve{H}$ есть совокупность точек, лежащих на прямых, проведенных через точки множества H параллельно оси OT, и пусть $\breve{P}$ есть совокупность точек, лежащих на прямых, проведенных через точки множества P параллельно оси OX. Множество-сумма $\breve{H} + \breve{P}$ есть, очевидно, *пространственное аналитическое дополнение.* Свертывая трехмерное пространство $OXYT$ в плоскость $X'OY'$ посредством преобразования Peano: $x = \varphi(x')$, $t = \psi(x')$, $y = y'$, мы получаем в полосе $(0 < t < 1, -\infty < y < +\infty)$ плоскости $X'OY'$ плоское аналитическое дополнение, пересекаемое прямым $t = t_0$ для $0 < t_0 < 1$ по линейным аналитическим дополнениям с совершенным ядром, и только по таковым. Если мы теперь к полученному таким образом плоскому аналитическому дополнению прибавим в полосе $(-1 < t < 0, -\infty < y < +\infty)$ множество измеримое B, универсальное по отношению ко всем счетным (и конечным) линейным множествам, то этим самым и заканчивается построение полууниверсального аналитического дополнения.

8. ***Новые проблемы.*** Идя по указанному пути, мы встречаемся не только с новыми проблемами, но и с новыми принципами, которые могут показаться совсем невероятными при другом ходе идей.

Прежде всего, вводя идеальные аналитические дополнения, естественно рассмотреть то, что можно назвать *непрерывностью высшего рода* прямой линии, представляющей явную аналогию с обычною непрерывностью Cauchy — Dedekind'а. Но эта непрерывность приводит нас к двум следующим предложениям, которых истинность мне кажется вне сомнений:

Предложение I. *Всякое множество точек мощности* $\aleph_1$ *есть аналитическое дополнение.*

Предложение II. *Всякое множество точек, получаемое суммированием конституант в трансфинитном числе аналитического дополнения, есть опять аналитическое дополнение.*

К этим двум предложениям, кажущимся мне несомненными, я присоединил бы еще одно предложение, истинность которого кажется мне правдоподобною:

Предложение III. *Сумма трансфинитного числа множеств, измеримых* B *и занумерованных трансфинитными числами 2-го класса, есть проективное множество типа* A_2. *Если же указанное перенумерование есть эффективное, тогда эта сумма есть проективное множество типа* B_2.

Я прибавлю, что известно, что всякое множество типа A_2 разложимо в $\aleph_1$ не перекрывающихся множеств измеримых B, но разложение это *не есть эффективное*, и что до сих пор не открыто множеств, разложимых на $\aleph_1$ множеств измеримых B, которые не оказались бы типа A_2.

9. *Две гипотезы континуума.* Остается сказать лишь несколько слов о так называемой „гипотезе континуума“. Под таковою чаще всего понимают гипотетическое равенство G. Cantor'a,

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Мы будем его называть „гипотезой Cantor'a“ или, лучше, „*первой гипотезой континуума*“.

Известно, что D. Hilbert, оставаясь целиком на излюбленной им почве „непротиворечивого“, дал обещание представить формальное доказательство непротиворечивости гипотезы Cantor'a.

Между тем, гипотеза Cantor'a вовсе не есть единственная гипотеза, и это даже тогда, когда ограничиваются писанием алефов. Единственное средство установить истинность гипотезы Cantor'а, — это дать взаимно-однозначное и *эффективное* (т. е. описанное совершенно точным образом, без какой-либо неопределенности или двусмысленности) соответствие Z между точками прямой линии, с одной стороны, и трансфинитными числами второго класса, с другой стороны. Эта эффективность имела бы огромное значение, интерес и важность, потому что в этом случае эффективность соответствия Z была бы первопричиной и источником многочисленнейших и важнейших арифметических, алгебраических, геометрических и аналитических соотношений. Но известно, что не только мы не можем ожидать, что будущий прогресс науки нас приведет к такому эффективному соответствию Z, но что, наоборот, становится все очевиднее и очевиднее, что, на самом деле, будет иметь место как-раз обратный факт: *может быть*, в один прекрасный день ресурсы теории Hilbert'а настолько будут подвинутыми вперед, что можно будет с успехом атаковать доказательство несуществования такого соответствия Z, хотя *существование неэффективного соответствия Z и непротиворечиво.*

Но гипотеза Cantor'а *без эффективности соответствия Z* утрачивает почти всякую важность. Одно лишь *преодоление трудности* при доказательстве непротиворечивости гипотезы Cantor'а может представлять привлекательность для аналистов. Вне же этого соблазна разрешение гипотезы Cantor'а (причем мы все время имеем в виду, говоря это, лишь *неэффективное Z*) не даст науке почти ничего, так как все разрешится в необозримое количество самых парадоксальных и патологических примеров функций и множеств, не имеющих индивидуального существования, но имеющих *quasi-существование* лишь в смысле аксиомы Zermelo.

В математической литературе не раз проскальзывали намеки на то, что возможны и другие гипотезы континуума. Среди них наиболее интересной мне представляется та, которая выражается алефическим равенством

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$$

Мы не станем доискиваться, с каким именем связано самое первое начертание этого равенства автором, который, действительно, серьезно мыслил его возможность. Мы назовем его пока *„второй гипотезой континуума"*.

Эта гипотеза континуума вполне согласуется с выставленными нами в § 8 гипотетическими предложениями I, II и III.

Вторая гипотеза континуума мне представляется в той же самой степени изъятой от противоречий, как это имеет место и для первой гипотезы континуума. Мне думается, что со временем прогресс теории Hilbert'а будет настолько значительным, что позволит с успехом атаковать доказательство непротиворечивости и этой второй гипотезы континуума.

А тогда пред нами предстанет необходимость *выбирать* между различными гипотезами континуума, *в равной мере изъятыми от противоречия*. И этот выбор, вне всякого сомнения, будет продиктован одним только *наблюдением фактов*.

Мы видим, насколько были проницательны слова E. Borel'я, писавшего: „следует различать подлинную математику от чисто словесных логических спекуляций, в которых озабочены лишь одним совершенно отрицательным качеством: свободой от словесного противоречия" (Теория меры и теория интегрирования, § 3, 1914).

ИСКЛЮЧЕНИЕ ТРАНСФИНИТНОГО

10. *Проблема исключения трасфинитного.* Проблема эта возникла впервые под влиянием критики E. Borel'я всех тех математических рассуждений, в которых вводятся, действительно, *все* трансфинитные числа второго класса (и не только те, которые меньше некоторого определенного трансфинита, наперед заданного): E. Borel рассматривает совокупность *всех* трансфинитных чисел второго класса как совокупность *незаконную*, так как она не может мыслиться как завершенная в отличие от натурального ряда, где *дан закон его образования*. Поэтому E. Borel опротестовывает все математические рассуждения, где вводятся, действительно, все трансфинитные числа второго класса, и рассматривает как недоказанные все следствия, вытекающие из подобных рассуждений.

Первая серьезная попытка систематического исключения трансфинитных чисел из математических рассуждений была сделана польским математиком Куратовским в статье: *Une méthode d'élimination des nombres transfini des raisonnements mathématiques* (*Fundamenta Mathematicae*, t. III, 1921, p. 1—33) [1] Но, насколько можно понять, автор заменяет рассмотрение трансфинитных чисел введением вполне упорядоченных множеств. И так как их типы в каком-нибудь математическом рассуждении могут быть *сколь угодно великими*, то все возражения против этого рассуждения остаются в силе и после работы Куратовского.

Другая попытка исключения трансфинитного была сделана лично мною, но не для всяких вообще математических рассуждений, а лишь для некоторой группы их, именно для тех, на которых была основана теория аналитических множеств. После возражений E. Borel'я было естественно желать освободить от подозрительных рассуждений эту теорию.

Это освобождение протекло очень легко и было сделано немедленно. Но лишь один пункт, именно теорема Суслина:

> „*Два аналитических множества, взаимно дополнительные одно к другому, измеримы B*",

продолжал держаться упорно и доставил много забот.

Это важное предложение было доказано Суслиным помощью очень сложной конструкции, в которой трансфинитная индукция играла исключительно важную роль и была совершенно неизбежна в этом рассуждении. Употребление существенно *трансфинитной индукции*, которую нельзя свести к „полной индукции" обыкновенной арифметики, преследующей лишь по всем натуральным числам, весьма характерно для рассуждения Суслина, которое без этого употребления не могло состояться.

Таким образом, предстояло *передоказать теорему Суслина*, исходя из совершенно иных начал и не употребляя трансфинитных чисел ни явно, ни неявно в замаскированном состоянии (в виде вполне упорядоченных множеств). Для

---

[1] Следует, однако, отметить еще две попытки, правда, удавшиеся, но совершенно частного характера исключения трансфинитного. Одна из них принадлежит Lindelöf'у, исключившему трансфинитное из теоремы Cantor-Bendixon'a, другая принадлежит Lebesgue'y, исключившему трансфинитное из теоремы Baire'a.

этой цели я обратился к идее отделимости множеств, восходящей еще к Hausdorff'у, который первый дал понятие отделимости множеств одного семейства посредством множеств другого семейства.

Для целей освобождения теории аналитических множеств от трансфинитного в теореме Суслина я ввел понятие множеств отделимых B. Это новое понятие позволило весьма скоро, совершенно прямым путем, без какого-нибудь употребления ни трансфинитных чисел, ни вполне упорядоченных множеств и без использования теоремы Суслина, доказать теорему:

> „*Всякие два аналитические множества, не имеющие общей точки, отделимы B*“,

из которой предложение Суслина вытекало сразу же как простое следствие. Таким образом, здесь трансфинитное было радикально исключено введением понятия „*отделимости B*“.

Сделанный новый шаг в теории аналитических множеств показался мне настолько существенным, что я искал охарактеризовать его тем или иным выразительным именем; поэтому я назвал доказанную теорему об отделимости B аналитических множеств *первым принципом отделимости*.

Идеи E. Borel'я относительно абсолютной неопределенности понятия „Ω“ и незаконности его введения в математику, а также еще и та его замечательная идея, что Ω есть не что иное, как просто трансфинитное число β второго класса только „невыразимо большое“, „очень большое“ („très grand et échappant à nos notations et à notre imagination), естественно, вызывали желание провести аналогию[1] между аналитическими множествами неизмеримыми B и множествами измеримыми B „очень большого“ класса β. И так как аналитическое дополнение $\mathscr{E}$ неизмеримое B дает место разложению

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \dots + \mathscr{E}_\omega + \dots + \mathscr{E}_\alpha + \dots\dots \mid \Omega$$

---

[1] См. мою работу *Analogies entre les ensembles mesurables B et les ensembles analytiques.* Fundamenta Mathematicae, t. XVI, 1930, p. 48.

по конституантам измеримым B, классы $cl\ \mathcal{E}_\alpha$ которых необходимо удовлетворяют неравенству[1]

$$lc\ \mathcal{E}_\alpha < 2\frac{\alpha}{\omega} + 1$$

и, значит, могут лишь постепенно возрастать до Ω, то естественно было рассматривать аналитическое дополнение $\mathcal{E}$ как аналог множеству измеримому B, *достижимому снизу* (т. е. разлагающемуся на сумму множеств измеримых B *низших* классов меньших „весьма большого" класса β. Следовательно, само аналитическое множество E неизмеримое B, дополнительное к $\mathcal{E}$, следовало рассматривать как $\operatorname{Sup}\beta$, точнее, как „элемент" класса β (т. е. как множество класса β достижимое сверху и недостижимое снизу).

Указанная аналогия аналитических множеств и множеств измеримых B заставила искать принципов отделимости уже среди множеств измеримых B. Естественно было их называть в этом случае „малыми принципами", сохраняя название *„больших принципов"* для теории аналитических и проективных множеств.

Аналог ***первому большому принципу*** был немедленно найден в виде следующего предложения, которое мы назвали ***„первым малым принципом"***.

„Два элемента класса β, не имеющие общей точки, всегда отделимы (β)".

Здесь под *отделимостью* (β) имеется в виду понятие, аналогичное *отделимости* B: два какие-нибудь множества E_1 и E_2 называются *отделимыми* (β), когда имеются два множества H_1 и H_2, не имеющие общей точки и содержащие соответственно E_1 и E_2, причем H_1 и H_2 суть *либо* множества класса $<\beta$, либо двусторонние множества класса β.

Самое доказательство первого малого принципа есть немедленное: пусть E' и E'' два элемента класса β, не имеющие общей точки. По самому определению элемента класса β,

[1] Я должен отметить, что сотрудница Математического института им. В. А. Стеклова Л. В. Келдыш недавно указала точный верхний предел для класса конституанты $\mathcal{E}_\alpha$, уже достигаемый при некоторых решетах, и, значит, не могущий быть далее пониженным.

существуют две последовательности монотонно убывающие множеств классов $<\beta$

$$I > E'_1 > E'_2 > \ldots > E'_n > \ldots \tag{4}$$

и

$$I > E''_1 > E''_2 > \ldots > E''_n > \ldots \tag{5}$$

имеющие данные элементы E' и E'' соответственно своим пределам. В этих условиях строят два альтернативные убывающие ряда множеств классов

$$H' = IE'_1 - E'_1E''_1 + E''_1E'_2 - E'_2E''_2 + \ldots + \ldots + E''_nE_{n+1} - E'_{n+1}E''_n + \ldots \tag{6}$$

и

$$H'' = IE''_1 - E''_1E'_1 + E'_1E''_2 - E''_2E'_2 + \ldots + \ldots + E'_nE''_{n+1} - E''_{n+1}E'_{n+1} + \ldots \tag{7}$$

Эти альтернативные ряды сходятся, потому что элементы E' и E'' не имеют общей точки и, значит, общие члены этих рядов имеют пределом *нуль* (т. е. пустое множество).

Очевидно, что множества H' и H'' соответственно содержат множества E' и E'' и не имеют общей точки. И так как они могут быть написанными каждое одновременно в двух видах:

$$H' = (IE'_1 - E'_1E''_1) + (E''_1E'_2 - E'_2E''_2) + \ldots \tag{8}$$

и

$$H' = IE' - [(E'_1E''_1 - E''_1E'_2) + (E'_2E''_2 - E''_2E'_2) + \ldots] \tag{9}$$

то H есть или множество класса $<\beta$, или двустороннее множество класса β. То же самое следует сказать и о H'', что и доказывает первый малый принцип.

Сделанное рассуждение важно вот в каком отношении: оперируя над множествами измеримыми B гораздо легче притти к определенным математическим заключениям, чем при рассмотрении аналитических и проективных множеств. И когда теоремы фактически уже получены для множеств класса β, то формально делая замену числа β символом Ω, мы в результате этого своеобразного „перехода к пределу“ получаем теоремы для самих аналитических или проективных множеств уже неизмеримых B. Понятно, что для того, чтобы полученные теоремы имели ценность в теории аналитических и проективных множеств, нужно, чтобы их формулировки перестали содержать трансфинитное, т. е чтобы теоремы эти были бы выражены на конечном язык аналитических и проективных множеств. *Это достигается процессом исключения трансфинитного.*

Рассмотрим в качестве примера *второй малый принцип.* Он имеет силу для множеств измеримых B класса β и формулируется так:

> „*Удаляя у двух пересекающихся элементов класса* β *их общую часть, мы получаем два множества отделимые* ($C\beta$)“.

При этом два какие-нибудь множества E_1 и E_2 называются *отделимыми* ($C\beta$), когда имеются два множества H_1 и H_2, не имеющие общей точки и содержащие соответственно E_1 и E_2, причем H_1 и H_2 суть *множества класса* β, *достижимые снизу.*

Для доказательства второго малого принципа достаточно обратиться к первому малому принципу и к его доказательству.

В самом деле, пусть E' и E'' два какие-нибудь элемента класса β, *вообще уже имеющие общие точки.* Пусть эти элементы E' и E'' определены как пределы монотонно убывающих последовательностей

$$I > E'_1 > E'_2 > \ldots > E'_n > \ldots \tag{4}$$

и

$$I > E''_1 > E''_2 > \ldots + E''_n > \ldots \tag{5}$$

Мы теперь определяем два множества H' и H'' разложениями:

$$H' = \{(IE'_1 - E'_1E''_1) + (E''_1E'_2 - E'_2E''_2) + \ldots + \\ + (E''_nE'_{n+1} - E'_{n+1}E''_{n+1}) + \ldots\} \tag{8}$$

и

$$H'' = \{IE''_1 - E''_1E'_1) + (E'_1E''_2 - E''_2E'_2) + \ldots + \\ + (E'_nE''_{n+1} - E''_{n+1}E'_{n+1}) + \ldots\} \tag{9}$$

Для того, чтобы *второй малый принцип* стал уже доказанным, достаточно просто заметить, что множества H' и H'', определенные формулами (8) и (9) суть, *или* множества класса $<\beta$, *или* множество класса β, достижимое снизу. И так как ясно, что множества H' и H'', определенные формулами (8) и (9) не имеют общей точки и содержат в себе соответственно множества-разности $E'-E'E''$ и $E''-E'E''$, то этим второй малый принцип является уже вполне доказанным.

Теперь, если желают переделать второй *малый* принцип во второй *большой* принцип, для этого прежде всего необходимо представить данные *аналитические* множества E' и E'' как трансфинитные пределы соответственно двух монотонно убывающих последовательностей (4*) и (5*)

$$I > E_1' > E_2' > \ldots > E_\omega' > \ldots > E_\alpha' > \ldots\ldots \mid \Omega \qquad (4^*)$$

и

$$I > E_1'' > E_2'' > \ldots > E_\omega'' > \ldots > E_\alpha'' > \ldots\ldots \mid \Omega \qquad (5^*)$$

множеств *измеримых* B.

Сделать это очень легко, раз аналитические дополнения $\mathscr{E}'$ и $\mathscr{E}''$ данных множеств E' и E'' разложены в трансфинитные ряды по их конституантам:

$$\mathscr{E}' = \mathscr{E}_0' + \mathscr{E}_1' + \mathscr{E}_2' + \ldots + \mathscr{E}_\omega' + \ldots + \mathscr{E}_\alpha' + \ldots\ldots \mid \Omega \ (10)$$

и

$$\mathscr{E}'' = \mathscr{E}_0'' + \mathscr{E}_1'' + \mathscr{E}_2'' + \ldots + \mathscr{E}_\omega'' + \ldots + \mathscr{E}_\alpha'' + \ldots\ldots \mid \Omega \ (11)$$

При этом мы предполагаем, что аналитические множества E' и E'' заданы соответственно решетами Γ' и Γ'', составленными из счетного числа интервалов параллельных оси OX; поэтому все конституанты разложений (10) и (11) *измеримы* B.

Для того, чтобы иметь монотонные трансфинитные последовательности (4*) и (5*), достаточно положить:

$$E_\alpha' = I - (\mathscr{E}_0' + \mathscr{E}_1' + \ldots + \mathscr{E}_\omega' + \ldots + \mathscr{E}_\gamma' + \ldots \mid \alpha) \qquad (12)$$

и

$$E_\alpha'' = I - (\mathscr{E}_0'' + \mathscr{E}_1'' + \ldots + \mathscr{E}_\omega'' + \ldots + \mathscr{E}_\gamma'' + \ldots \mid \alpha) \qquad (13)$$

Формулы (12) и (13), очевидно, можно написать в виде:

$$E_\alpha' = E' + (\mathscr{E}_\alpha' + \mathscr{E}_{\alpha+1}' + \ldots\ldots \mid \Omega) \qquad (12')$$

и

$$E_\alpha'' = E'' + (\mathscr{E}_\alpha'' + \mathscr{E}_{\alpha+1}'' + \ldots\ldots \mid \Omega) \qquad (13')$$

В этих условиях, множества-разности $E'-E'E''$ и $E''-E'E''$ отделимы, очевидно, двумя множествами H' и H'', не имеющими общей точки и определяемыми двумя трансфинитными разложениями:

$$H' = (IE_1' - E_1''E_1'') + \ldots + \\ + (E_\alpha''E_{\alpha+1}' - E_{\alpha+1}'E_{\alpha+1}'') + \ldots\ldots |\Omega \qquad (8^*)$$

$$H'' = (IE_1'' - E_1''E_1') + \ldots + \\ + (E_\alpha'E_{\alpha+1}'' - E_{\alpha+1}''E_{\alpha+1}') + \ldots\ldots |\Omega \qquad (9^*)$$

Для того, чтобы *второй большой принцип был доказан, нужно, чтобы было установлено, что H' и H'' суть не что иное, как аналитические дополнения.*

Следовательно, имея заданными разложения (8*) и (9*), т. е. написанными при помощи совокупности всех трансфинитных чисел 2-го класса, *нужно исключить из них трансфинитное.*

Таким образом, проблема исключения трансфинитного приобретает уже не только теоретический, но и совершенно конкретный смысл, так как, если мы умеем исключать трансфинитное из трансфинитных рядов, то этим самым мы имеем возможность получать новые теоремы в теории аналитических и проективных множеств, выраженные в „конечном“ виде.

Таким образом, проблему исключения трансфинитного вполне законно сравнить с классической проблемой математического анализа суммирования в конечном виде бесконечных рядов, бесконечных произведений или вычисления в конечном виде определенных интегралов: *и в этих классических проблемах происходит также, ведь, исключение, но уже не трансфинитного, а инфинитного (т. е., просто бесконечного).*

В частности, исключение трансфинитного из рядов (8*) и (9*) делается следующим образом: сначала пишут общий член ряда (8*) в виде

$$E'_{\alpha+1} \cdot (E''_\alpha - E''_{\alpha+1})$$

что после формул (12') и (13') дает

$$[E' - (\mathscr{E}'_{\alpha+1} + \mathscr{E}'_{\alpha+2} + \ldots\ldots |\Omega] \times \mathscr{E}''_\alpha$$

следовательно, трансфинитный ряд (8*) можно написать так:

$$H' = \sum_{\alpha=0}^{\Omega} [E' - (\mathscr{E}'_{\alpha+1} + \ldots\ldots |\Omega] \times \mathscr{E}''_\alpha \qquad (14)$$

Теперь, чтобы „просуммировать“ трансфинитный ряд (14), обозначим чрез x какую-нибудь точку оси OX, чрез P_x перпендикуляр в точке x к оси OX и чрез R'_x и R''_x соответственно пересечения решет Γ' и Γ'' перпендикуляром P_x. Следовательно, R'_x и R''_x суть счетные (или конечные) множества.

Так как в точке x множества E' множество R'_x не есть вполне-упорядоченное, а в точке x конституанты $\mathscr{E}'_\gamma$ оно будет вполне упорядоченным и типа γ, то отсюда множество H' получает очень простой геометрический смысл: это есть совокупность всех точек x, принадлежащих к $\mathscr{E}'$ таких, что R'_x не подобно части (в широком смысле) множества R''_x. А относительно этого множества доказывается, что оно есть *аналитическое дополнение* (см. мою книгу: *Leçons sur les ensembles analytiques*, p. 216). Следовательно, H' и аналогично H'' суть *аналитические дополнения.* Этим второй большой принцип является вполне доказанным.

Мы видим, таким образом, что проблема исключения трансфинитного, подобная классической проблеме суммирования рядов, представляет существенный интерес даже в том частном виде, который мы ей здесь придали: *суммирования трансфинитных рядов, написанных как комбинации множеств, снабженных индексами.*

Но еще больший интерес являет проблема исключения трансфинитного, когда она ставится в более общей форме. Эта же последняя такова:

Имея заданным множество точек E, определенное при помощи совокупности всех трансфинитных чисел второго класса, узнать, возможно или нет преобразовать первоначальное определение множества в другое, не содержащее никаких следов (ни явных, ни неявных) трансфинитного?

11. *Два семейства множеств.* Среди множеств точек E, определяемых при помощи совокупности всех трансфинитных чисел второго класса, следует различать два семейства множеств, природа которых совершенно различна.

Первое семейство состоит из множеств E, определяемых трансфинитным числом операций, абсолютно независимых одна от другой. Самые операции, определяющие множество E, занумерованы трансфинитными числами второго класса, но абсолютно не зависят одна от другой.

Множества этого семейства мы будем называть *множествами 1-го рода* или *множествами со свободными операциями*.

Простейшим примером множества со свободными операциями является, например, множество E, определенное формулой

$$E = \mathscr{E}'_0 + \mathscr{E}''_0 + \mathscr{E}'_1\mathscr{E}''_1 + \dots \mathscr{E}'_\omega\mathscr{E}''_\omega + \dots \mathscr{E}'_\alpha\mathscr{E}''_\alpha \dots\dots \mid \Omega$$

где $\mathscr{E}'_\alpha$ и $\mathscr{E}''_\alpha$ суть конституанты двух произвольно заданных решетами Γ' и Γ'' аналитических дополнений $\mathscr{E}'$ и $\mathscr{E}''$. *A priori* неясно, какой природы множество E и может ли здесь трансфинитное быть исключено. Мы в следующем параграфе увидим, что есть *проективное множество* и типа не сложнее A_ρ (т. е. разности двух аналитических множеств).

Второе семейство состоит из множеств E, определяемых трансфинитным числом операций, существенно зависящих одна от другой. Самые операции, определяющие множество E, и в этом случае занумерованы трансфинитными числами второго класса, но на этот раз уже существенно зависят одна от другой. Множества этого семейства мы будем называть *множествами 2-го рода* или *множествами со связанными операциями*.

Множества 2-го рода, вероятно, совсем не допускают исключения трансфинитного в противоположность множествам 1-го рода. Они, повидимому, не могут быть ни проективными, ни, просто, выразимыми без помощи совокупности *всех* трансфинитных чисел второго класса. Короче говоря, множества 2-го рода определяются существеннейшим образом *трансфинитной индукцией*, прослеующей по *всем* трансфинитным числам второго класса, и, вероятно, не могущей быть сведенной ни на обычную арифметическую индукцию, идущей только по натуральным числам, ни на усеченную трансфинитную индукцию, т. е. идущую хотя и по трансфинитам, но лишь только до некоторого трансфинитного числа *известного нам или неизвестного*.

Первый пример множества, которое, повидимому, есть истинное множество 2-го рода, не допускающее исключение трансфинитного, дан H. Lebesgue'ом в его знаменитом мемуаре *Sur les fonctions représentables analytiquement* (*Journal des mathématiques*. 1905). Там знаменитый автор, задавшись целью дать эффективный пример функции, не входящей в классы Baire'a, строит сначала как вспомогательный инструмент решето, определяющее ему *аналитическое множество неизмеримое* B, и затем определяет путем существенно-трансфинитной индукции, повидимому, совершенно не допускающей исключения трансфинитного, некоторую поверхность $y = \varphi(t,x)$, рассекаемую плоскостями $t = t_0$ по кривым, измеримым B и по *всем* таким кривым. Эта, вот, поверхность и была определена H. Lebesgue'ом при помощи существенно зависимых друг от друга операций, составляющих предмет трансфинитной индукции. Есть много данных думать, что поверхность $y = \varphi(t,x)$ Lebesgue'a и есть истинное *множество 2-го рода*, т. е. не только имеющее его внешнюю форму, но и не сводимое к множествам 1-го рода.

12. *Множества 1-го рода.* Мы уже указали в предыдущем параграфе, что множествами 1-го рода являются прежде всего те, которые изобразимы как суммы трансфинитных рядов, члены которых суть полиномы от аргументов, снабженных трансфинитными индексами; эти же аргументы суть конституанты наперед заданных аналитических дополнений.

Как мы сказали, простейшим случаем таких трансфинитных рядов является, например, ряд

$$E = \mathcal{E}'_0\mathcal{E}''_0 + \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}''_1 + \dots \mathcal{E}'_\omega\mathcal{E}''_\omega + \dots + \mathcal{E}'_\alpha\mathcal{E}''_\alpha + \dots\dots \mid \Omega \quad (15)$$

где $\mathcal{E}'_\alpha$ и $\mathcal{E}''_\alpha$ суть конституанты двух аналитических дополнений $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$, определенных решетами Γ' и Γ''.

Легко доказать, что *множество 1-го рода* E, *определенное формулой* (15), *есть проективное множество типа не сложнее* A_ρ (т. е. разности двух аналитических множеств).

Чтобы видеть это (и тем самым показать на конкретном примере процесс исключения трансфинитного), напишем разложения аналитических дополнений $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$ в ряд по их конституантам:

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}'_0 + \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 + \dots + \mathcal{E}'_\omega + \dots + \mathcal{E}'_\alpha + \dots\dots \mid \Omega$$

$$\mathcal{E}'' = \mathcal{E}''_0 + \mathcal{E}''_1 + \mathcal{E}''_2 + \dots + \mathcal{E}''_\omega + \dots + \mathcal{E}''_\alpha + \dots\dots \mid \Omega$$

Обозначим чрез H' множество точек x аналитического дополнения $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}''$ таких, что R'_x не подобно части множества R''_x; аналогично пусть H'' есть множество точек x

множества $\mathscr{E}' \times \mathscr{E}''$ таких, что R''_x не подобно части множества R'_x. Мы уже указали, что оба эти множества H' и H'' суть *аналитические дополнения*.

Но по определению $\mathscr{E}'_\alpha$ есть множество точек x, где R'_x есть вполне упорядоченное и имеет α своим типом; то же самое имеет место и для E''_α по отношению к R''_x.

Отсюда следует, что множество H' изобразимо двойной трансфинитною суммою

$$H' = \sum_{\alpha > \beta} \mathscr{E}'_\alpha \cdot \mathscr{E}''_\beta \tag{16}$$

Точно так же для H'' мы имеем

$$H'' = \sum_{\alpha < \beta} \mathscr{E}'_\alpha \cdot \mathscr{E}''_\beta \tag{17}$$

Отсюда ясно, что данное множество E, изображенное трансфинитною суммою (15), допускает еще и другое изображение, на этот раз уже не трансфинитное, но *конечное* в виде формулы:

$$E = \mathscr{E}' \times \mathscr{E}'' - (H' + H'') \tag{18}$$

И так как $\mathscr{E}'$, $\mathscr{E}''$, H' и H'' суть аналитические дополнения, то множество E есть не сложнее типа A_ρ. Таким образом, *из первоначального определения множества E трансфинитное является исключенным совершенно.*

13. Естественно после этого желать исключить трансфинитное из рядов типа

$$E = \mathscr{E}'_0 \cdot \mathscr{E}''_{\varphi(0)} + \mathscr{E}'_1 \cdot \mathscr{E}''_{\varphi(1)} + \dots \mathscr{E}'_\omega \cdot \mathscr{E}''_{\varphi(\omega)} + \\ + \dots \mathscr{E}'_\alpha \cdot \mathscr{E}''_{\varphi(\alpha)} + \dots \dots | \Omega, \tag{19}$$

где $\mathscr{E}'_\gamma$, $\mathscr{E}''_\gamma$ суть конституанты двух наперед заданных аналитических дополнений $\mathscr{E}'$ и $\mathscr{E}''$ и *где $\varphi(\alpha)$ есть любая наперед заданная возрастающая функция трансфинитного аргумента.*

Здесь при решении вопроса о том, возможно или нет определить в конечном виде множество E, заданное трансфинитной формулой (19), т. е. исключить из его первоначального определения трансфинитное, мы наталкиваемся на характерную трудность, заключающуюся в том, что сначала нужно выяснить, что значит выражение: *„задать возрастающую функцию $\varphi(\alpha)$ трансфинитного аргумента α“?*

Заметим, что относительно самих конституант $\mathscr{E}'_\gamma$ и $\mathscr{E}''_\gamma$ вопроса этого совсем не возникает, потому что они появляются вполне определенными, раз заданы решета Γ' и Γ''; таким образом, вопрос о задании всех конституант $\mathscr{E}'_\gamma$ и $\mathscr{E}''_\gamma$ сводится к заданию решет Γ' и Γ''. И так как решета эти состоят из *счетного* числа интервалов параллельных оси OX и имеющих своими концами точки с рациональными координатами, то так далеко заходить, чтобы поднимать вопрос о задании решет, мы не будем.

Совсем иное дело вопрос о задании трансфинитной возрастающей функции $\varphi(\alpha)$. Таковая, понятно, задана, если задано множество ее значений. Значит, все дело сводится к заданию, т. е. к *умению задавать* различные части совокупности всех трансфинитных чисел

$$0,\ 1,\ 2, \ldots \omega, \ldots \alpha \ldots \ldots | \Omega$$

Важно при этом отметить, что это умение задать часть чисел второго класса должно исходить из предположения, что это задание направляется лишь *счетным числом условий*. Действительно, если условий, каждое из которых фиксируется „произвольно", будет несчетное число, то тогда вообще слово „задание" утрачивает смысл, потому что для задания части трансфинитных чисел второго класса было бы достаточным задать в отдельности всякое ее число. Итак, задание трансфинитной функции $\varphi(\alpha)$ должно быть сделано лишь *счетным числом условий*.

Не следует при этом бояться утраты какой-нибудь части чисел второго класса, не поддающейся заданию путем выбора, т. е. фиксации счетного числа условий, так как ничто не доказывает, как было уже указано, неверности второй гипотезы континуума:

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$$

и значит, выбирая трансфинитивные функции $\varphi(\alpha)$ счетным числом условий, мы можем даже с точки зрения математика-идеалиста (каковы, например Т. Hadamard, F. Hausdorff, Zermelo и др.) получать их *все*.

При этом надо еще учесть и то обстоятельство, что задание функции $\varphi(\alpha)$ одними лишь *арифметическими* операциями, проделываемыми над трансфинитными числами и комбинированными между собой, является в высшей степени бедным. По верному замечанию П. С. Новикова, всякий арифметический закон, составленный для трансфинитов второго класса, автоматически и без малейшего изменения переносится на трансфинитные числа *третьего*, *четвертого* и вообще *любого* класса. Таким образом, задание функции $\varphi(a)$ одними лишь арифметическими законами является нецелесообразным.

14. Ввиду сказанного мы предприняли такой путь задания трансфинитной функции $\varphi(a)$ счетным числом условий.

Возьмем на плоскости XOY универсальное плоское аналитическое дополнение U и еще какое-нибудь *индивидуальное* плоское множество H, названное нами каким-нибудь законом, лишь бы этот закон не содержал в себе трансфинитного (ни явно, ни неявно).

Пусть x есть какая-нибудь точка оси OX; далее пусть P_x есть перпендикуляр в точке x к оси OX; пусть, наконец, U_x и H_x будут линейными множествами, получающимися пересечением плоских множеств U и H перпендикуляром P_x.

Множество U предполагаем заданным вполне определенным пространственным решетом Γ, состоящим из плоских прямоугольников параллельных плоскости XOY, ориентированных по осям OX и OY, находящихся в счетном числе. Пусть Γ_x есть пересечение решета Γ плоскостью, проведенной через точку x оси OX перпендикулярно к этой оси.

Пусть

$$U = U_0 + U_1 + \cdots + U_\omega + \ldots + U_\alpha + \cdots\cdots \mid \Omega \qquad (20)$$

есть разложение универсального аналитического дополнения по конституантам: всякое U_α есть плоское множество *измеримое* B.

В этих условиях ясно, что

$$U_x = (U_0)_x + (U_1)_x + \cdots + (U_\omega)_x + \cdots + (U_\alpha)_x + \cdots\cdots \mid \Omega \, (21)$$

есть разложение по конституантам линейного аналитического дополнения U_x; здесь $(U_\alpha)_x$ обозначает линейное множество, образующееся пересечением плоского множества U_α перпендикуляром P_x.

Возьмем теперь линейное множество H_x. Оно, вообще говоря, содержит в себе *целиком* (т. е. без раздробления) трансфинитное число конституант $(U_\alpha)_x$; другие же конституанты $(U_\alpha)_x$ являются: *или* раздробленными, т. е. частью входящими в H_x и в то же самое время частью выходящими из него, *или* не имеющими с H_x общей точки.

Сосредоточим свое внимание на конституантах $(U_\alpha)_x$, целиком без раздробления содержащихся в H_x. Пусть их нумера отмечены среди множества *всех* конечных и трансфинитных чисел второго класса; в таком случае они составят часть совокупности трансфинитов второго класса (присоединяя к ним и конечные числа), и, значит, определят собой некоторую возрастающую трансфинитную функцию, которую мы обозначим теперь чрез $\varphi(x, \alpha)$.

Эту самую функцию $\varphi(x, \alpha)$ мы и будем рассматривать как заданную нам через задание действительного числа x, и, следовательно, как определенную счетным числом условий.

Ясно, что при заданном плоском множестве H семейство трансфинитных функций $\varphi(x, \alpha)$ вполне определено. Чем „больше" плоское множество H содержит в себе линейных множеств H_x (т. е. чем обильнее множество H линейными множествами H_x: надо иметь в виду, что за H можно взять, например, какое-нибудь плоское множество измеримое B, но можно взять и универсальное аналитическое множество, и т. д.), тем большее разнообразие мы имеем трансфинитных функций $\varphi(x, \alpha)$. Притом плоские множества U и H всегда можно взять за дважды универсальную систему (см. мои *Leçons sur les ensembles analytiques*, стр. 220). Трансфинитную функцию $\varphi(x, \alpha)$ назовем *проективной*, если исходное плоское множество H было проективным.

15. Естественно, после того как мы определили, какие трансфинитные функции $\varphi(\alpha)$ мы рассматриваем как заданные, написать ряд (19) в виде

$$E_x = \mathscr{E}'_0 \cdot \mathscr{E}''_{\varphi(x,0)} + \mathscr{E}'_1 \cdot \mathscr{E}''_{\varphi(x,1)} + \cdots + \mathscr{E}'_\omega \cdot \mathscr{E}''_{\varphi(x,\omega)} + \cdots + \\ + \mathscr{E}'_\alpha \cdot \mathscr{E}''_{\varphi(x,\alpha)} + \cdots\cdots \mid \Omega \qquad (19^*)$$

и спросить, *возможно или нет исключить из этой формулы трансфинитное, дав множеству E_x конечное определение, т. е. свободное от следов трансфинитного?*

Ответ получается вполне определенный и утвердительный: такое исключение возможно. Это делается на основе следующих предложений, которые мы укажем, не приводя их доказательства.

Прежде всего будем рассматривать как „решето" всякое вообще плоское множество K, определенное без помощи трансфинитного. Обозначим через L совокупность всех точек x таких, что P_x пересекает плоское множество K по линейному множеству K_x не вполне упорядоченному в положительном направлении оси OY; обозначим через Λ совокупность всех точек x, таких, что K_x есть вполне упорядоченное в указанном направлении. Если мы обозначим чрез Λ_α множество точек x, где K_x есть вполне упорядоченное и имеет своим типом число α, то ясно, что имеем, вообще говоря, трансфинитное разложение

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_\omega + \cdots + \Lambda_\alpha + \cdots\cdots \mid \Omega \tag{22}$$

Мы его будем называть *разложением, соответствующим плоскому решету K, по конституантам Λ_α.*

Ясно, что множества L и Λ взаимно-дополнительные.

Введя эту терминологию, мы имеем предложения:

Теорема I. *Если разложения $\sum\limits_{\alpha=0}^{\Omega} \Lambda'_\alpha$ и $\sum\limits_{\alpha=0}^{\Omega} \Lambda''_\alpha$ определены решетами K' и K'', тогда разложение $\sum\limits_{\alpha=0}^{\Omega} \Lambda'_\alpha \cdot \Lambda''_\alpha$ происходит от решета K, определенного проектным образом, отправляясь от данных решет K' и K'', причем $\Lambda_\alpha = \Lambda'_\alpha \cdot \Lambda''_\alpha$.*

Теорема II. *Если разложение $\sum\limits_{\alpha=0}^{\Omega} \Lambda_\alpha$ происходит от решета K, и если непустые конституанты Λ_γ образуют последовательность $\Lambda_{\varphi(\alpha)}$, где $\varphi(\alpha)$ есть трансфинитная возрастающая функция, тогда разложение $\sum\limits_{\alpha=0}^{\Omega} \Lambda_{\varphi(\alpha)}$ происходит от решета K', определяемого проективным образом, отправляясь от решета K, причем $\Lambda'_\alpha = \Lambda_{\varphi(\alpha)}$.*

Эта последняя теорема имеет еще ту важность, что из трансфинитной возрастающей функции $\beta = \varphi(\alpha)$ дает возможность получить обратную функцию $\alpha = \psi(\beta)$ проективным путем.

Комбинированное применение указанных общих теорем к частному случаю разложения (19*) приводит к предложению:

разложение, определяемое трансфинитным рядом

$$E_x = \mathscr{E}'_0 \cdot \mathscr{E}''_{\varphi(x,0)} + \mathscr{E}'_1 \cdot \mathscr{E}''_{\varphi(x,1)} + \cdots + \mathscr{E}'_\alpha \cdot \mathscr{E}''_{\varphi(x,\alpha)} + \cdots\cdots \,|\Omega \quad (19^*)$$

допускает исключение трансфинитного, причем сумма E_x этого ряда есть сечение перпендикуляром P_x некоторого плоского множества E, определяемого проективно, *отправляясь от заданного множества H.*

Как следствия этого предложения мы имеем:

Следствие 1. *Если трансфинитный ряд*

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots + \mathscr{E}_\omega + \ldots + \mathscr{E}_\alpha + \ldots\ldots \,|\Omega$$

есть разложение аналитического дополнения по конституантам, происходящее от обыкновенного решета C, составленного из интервалов, тогда множество

$$\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_\omega + \mathscr{E}_{\omega^2} + \ldots + \mathscr{E}_{\omega\omega} + \ldots + \mathscr{E}_{\omega^\alpha} + \ldots\ldots \,|\Omega$$

есть проективное.

Следствие II. *При тех же самых условиях множество*

$$\mathscr{E}_{\varepsilon_0} + \mathscr{E}_{\varepsilon_1} + \mathscr{E}_{\varepsilon_2} + \ldots + \mathscr{E}_{\varepsilon_\omega} + \ldots + \mathscr{E}_{\varepsilon_\alpha} + \ldots\ldots \,|\Omega$$

есть опять проективное множество; здесь индексы $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \ldots \varepsilon_\alpha, \ldots$ суть так называемые „числа ε", удовлетворяющие равенству $\omega^\varepsilon = \mathscr{E}$, расположенные в возрастающем порядке; начальное число ε_0 есть предел последовательности $\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega} \ldots$

Самый вывод этого следствия очень прост: положим в равенстве (19*) конституанты $\mathscr{E}'_\gamma$ и $\mathscr{E}''_\gamma$ тождественными между собой. Тогда указанное равенство напишется в виде

$$E_x = \mathscr{E}_0 \cdot \mathscr{E}_{\varphi(x,0)} + \mathscr{E}_1 \cdot \mathscr{E}_{\varphi(x,1)} + \ldots + \\ + \mathscr{E}_\alpha \cdot \mathscr{E}_{\varphi(x,\alpha)} + \ldots\ldots \,|\Omega \quad (19^{**})$$

где $\mathscr{E}'_\gamma = \mathscr{E}''_\gamma = \mathscr{E}_\gamma$ есть конституанта некоторого аналитического дополнения $\mathscr{E}$, заданного обыкновенным решетом C.

Так как все конституанты аналитического дополнения $\mathscr{E}$ попарно не имеют общей точки, то лишь только те члены трансфинитного ряда (19**) не будут пустыми, где мы имеем удовлетворенным равенство

$$a = \varphi(x, a) \quad (23)$$

Следовательно, *трансфинитный ряд* (19**) *есть разложение множества* E_x *по конституантам аналитического дополнения* $\mathscr{E}$ *с индексами, являющимися корнями уравнения* $\alpha = \varphi(x, \alpha)$.

Наконец, полагая по определению

$$\varphi(x, \alpha) = \omega^{\alpha},$$

мы имеем плоское множество H проективным и состоящим из тождественных сечений. Следовательно, трансфинитный ряд

$$\mathscr{E}_{\varepsilon_0} + \mathscr{E}_{\varepsilon_1} + \mathscr{E}_{\varepsilon_2} + \dots + \mathscr{E}_{\varepsilon_\omega} + \dots + \mathscr{E}_{\varepsilon_\alpha} + \dots\dots \mid \Omega$$

имеет своею суммою *проективное множество.*

Было бы весьма интересно иметь пример множества E первого рода (т. е. со свободными операциями), которое не допускало бы исключения трансфинитного.

16. *Множества 2-го рода.* До сих пор мы имеем только один пример множества 2-го рода, описанный H. Lebesgue'ом в его знаменитом мемуаре *Sur les fonctions représentables analytiquement* (Journal des mathématiques 1905, стр. 214, стк. 2 сверху). Самый трансфинитный процесс со связанными операциями, который дает H. Lebesgue при описании своего множества 2-го рода, очень сложен и настолько темен, что в течение более тридцати лет математики не решались анализировать этого процесса, вероятно считая, что расшифровка процесса слишком трудна и не стоит затраченного времени, так как дело может кончиться пустяками. А между тем, подобно тому как вспомогательное множество, употребленное H. Lebesgue'ом как временный инструмент при построении его универсальной поверхности $y = \varphi(t, x)$ для всех кривых измеримых B и определенное им при помощи бинарного решета Γ, впервые описанного им же, оказалось *аналитическим множеством неизмеримым* B, подобно этому и трансфинитный процесс со связанными операциями, открытый H. Lebesgue'ом, представляет выдающееся явление. Есть много данных полагать, что процесс этот, являющийся не чем иным, как трансфинитной индукцией в ее полном объеме, в которой всякий следующий шаг обусловлен *всеми без исключения* предыдущими шагами, дает эффективные множества *существенно новой природы,*

совершенно отличные от проективных множеств и их деривативов.

Желая, насколько возможно, более приблизиться к пониманию самой сущности процесса H. Lebesgue'а, мы подвергнем его расщеплению, отколов от него детали проективного характера, не представляющие большого интереса.

17. Мы вместе с H. Lebesgue'ом отправимся от бинарного решета Γ. Под таковым понимается множество отрезков параллельных оси OX и определенных следующим образом: отмечают на интервале $0<y<1$ оси OY все рациональные точки, которые затем выписывают в виде бесконечной последовательности $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n, \ldots$ Потом берут прямую $y=\rho_n$ и делят ту ее часть, которая содержится в основном квадрате $(0<x<1,\ 0<y<1)$ плоскости XOY на 2^n равных отрезка, сохраняя из них лишь те, которые имеют четные нумера при последовательной нумерации их слева направо. Наконец, заставляя число пробегать все целые и положительные числа 1, 2, 3, ... и отмечая в основном квадрате все сохраненные отрезки, в результате получают то, что называется *бинарным решетом* Γ.

Вот, основное свойство бинарного решета: какова бы ни была подпоследовательность $\rho_{n_1}, \rho_{n_2}, \ldots$ рациональных чисел, всегда имеется такая точка x_0 на отрезке $[0 \leqslant x \leqslant 1]$ оси OX, что перпендикуляр P_{x_0} пересечет бинарное решето I по линейному множеству точек, ординаты которых образуют множество *тождественное с заданной подпоследовательностью* $\rho_{n_1}, \rho_{n_2} \ldots$

Пусть E есть аналитическое множество, определенное бинарным решетом Γ и $\mathscr{E}$ его дополнение. Так как из рациональных точек можно составить вполне упорядоченное множество *любого наперед заданного типа*, то отсюда заключаем, что аналитическое дополнение разлагается в ряд своих конституант

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_0+\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2+\ldots+\mathscr{E}_\omega+\ldots+\mathscr{E}_\alpha+\ldots\ldots|\Omega$$

из которых *ни одна не есть пустая.*

Для дальнейшего нам необходимо следующее определение:

Мы называем *частной производной* M'_y *по оси* OY данного плоского множества M совокупность всех предельных точек множества M, берущихся лишь вдоль прямых параллельных оси OY.

На основании теоремы о точках единственности множества измеримого B (см. мои *Leçons sur les ensembles analytiques*, стр. 259), имеем следующее предложение:

Теорема. *Частная производная плоского множества измеримого B есть аналитическое множество.*

Чтобы итти дальше, введем определение: мы называем какое-нибудь плоское множество M *множеством со счетными сечениями*, если всякая прямая параллельная оси OY пересекает множество M, самое большее, в счетном числе точек.

С этим определением мы имеем предложение:

Теорема. *Частная производная плоского множества измеримого B со счетными сечениями есть множество измеримое B.*

Приложив эту теорему к бинарному решету Γ, мы заключаем, что *частная производная Γ_y есть множество измеримое B.*

Обозначим через D множество точек частной производной Γ_y, лежащих на прямых $y = \rho_n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Ясно, что D есть измеримое B, и что его проекция d на ось OX также измерима B. Отсюда следует, что множество-разность

$$\mathscr{E} - d$$

есть *аналитическое дополнение.* Геометрический смысл этого множества очень прост.

$\mathscr{E} - d$ есть совокупность точек интервала $(0 < x < 1)$ *оси OX, для которых линейное множество R_x есть вполне упорядоченное и для которых производное множество R'_x не содержит точки с рациональною абсциссою.*

Заметим, что для x, принадлежащего к множеству-разности $E - d$, линейное множество R_x состоит из одних лишь *изолированных точек*, потому что R_x состоит из точек с рациональной ординатой, а R'_x не содержит точки с рациональной ординатой.

Обратимся теперь к множеству-сумме S трансфинитного ряда

$$S = E_\omega + E_{\omega^2} + \ldots + E_{\omega^\omega} + \ldots + E_{\omega^\alpha} + \ldots\ldots \mid \Omega$$

Мы уже сказали, что S есть *проективное множество* (см. § 15).

Поэтому множество

$$K = S \times (E - d)$$

есть также проективное. Проективным же будет множество K, составленное из точек прямых параллельных оси OY и проведенных через точки линейного множества K. И так как множество $\Gamma + \Gamma'_y$ есть измеримое B, то, наконец, *проективным будет плоское множество H, определенное формулой*

$$H = \check{K} \cdot (\Gamma + \Gamma'_y)$$

Геометрическое свойство точек множества H есть следующее: *прямая линия $x = x_0$, пересекающая множество H, пересекает его по замкнутому вполне упорядоченному множеству H_x типа $\omega^\alpha + 1$; изолированные точки линейного множества H_{x_0} имеют рациональную ординату; предельные точки множества H_{x_0} имеют все иррациональную ординату; заставляя точку X_0 пробегать все точки множества K, мы получаем* в с е в о з м о ж н ы е *замкнутые вполне-упорядоченные множества типа $\omega^\alpha + 1$ ($\alpha = 1, 2, \ldots\ldots |\Omega$) с описанными свойствами изолированных и предельных точек.*

18. *Идея процесса Lebesgue'а.* Рассмотрим трехмерное пространство и в нем координатный триедр $OXYZ$. Поместим на горизонтальную плоскость XOY только что построенное проективное множество H.

Теперь процесс Lebesgue'а есть следующий:

1. Рациональным точкам $\rho_1, \ \rho_2, \ldots \rho_n, \ldots$ интервала $(0 < y < 1)$ оси OY заставляем соответствовать некоторые заданные заранее действительные числа $p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$; благодаря этому всякой изолированной точке M сечения H_{x_0} множества H прямою $x = x_0$ будет отвечать определенное действительное число p_i, которое мы изобразим в виде апликаты точки N, проектирующейся в M. Таким образом, всякой *изолированной* точке M линейного множества H_{x_0} отвечает определенная пространственная точка N, имеющая точку M своею проекцией.

2. Допустим процесс Lebesgue'а продвинутым так, что *изолированные* точки M производных множеств $H_{x_0}^{\gamma)}$ получат

соответствующие им пространственные точки N, имеющие отвечающие им точки M своими проекциями, и допустим, что сказанное имеет силу уже для всех производных множеств $H_{x_0}^{(\gamma)}$, порядок γ которых *меньше числа* α. Покажем, что указанный процесс захватит *изолированные точки и производного множества* $H_{x_0}^{(\alpha)}$.

3. Если число α есть *первого рода*, т. е. если

$$\alpha = \alpha^* + 1,$$

то всякую изолированную точку M производного множества $H_{x_0}^{(\alpha)}$ можно окружить столь малым интервалом δ, в котором будут находиться лишь изолированные точки M_i производной $H_{x_0}^{(\alpha^*)}$, для которых уже имеются отвечающие им пространственные точки N_i, имеющие M_i своими проекциями. Пусть z_i есть апликата точки N_i. Тогда мы заставляем отвечать точке M, являющейся пределом точек M_i, *наибольший из пределов* $\overline{z}$ чисел z_i. Полученное число $\overline{z}$ мы рассматриваем как апликату точки N, соответствующей точке M и имеющей M своей проекцией.

4. Если число α есть *второго рода*, тогда имеется возможность указать фактически одну (и только одну) простую (инфинитную) возрастающую последовательность чисел $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_i < \ldots$, имеющую число α своим пределом. Действительно, пусть M есть изолированная точка производного множества $H_{x_0}^{(\alpha)}$. Точка M, очевидно, не принадлежит вполне упорядоченному множеству R_{x_0} и, будучи предельной его точкой, отсекает некоторый сегмент σ множества R_{x_0}. Но этот сегмент σ состоит из одних только рациональных точек ρ_i; поэтому элементы сегмента σ занумерованы целыми положительными числами совершенно определенным образом. С другой стороны, сегмент σ подобен сегменту σ_1 вполне упорядоченного множества $R_x + R'_x$, отсекаемому точкою M; поэтому элементы сегмента σ_1 также занумерованы целыми положительными числами. Но этот сегмент σ_1 заведомо содержит точки всех производных множеств $H_{x_0}^{(\gamma)}$ для $\gamma < \alpha$. Беря первую точку в каждом производном множестве $H_{x_0}^{(\gamma)}$ для $\gamma < \alpha$, мы имеем, очевидно, занумерованными целыми положительными числами все числа γ меньше числа α. И так как α есть число второго рода, то

такое занумерование немедленно влечет определение простой возрастающей цепочки $a_1 < a_2 < \ldots < a_i < \ldots$, имеющей число a своим пределом. Окружая точку M последовательностью вложенных друг в друга интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_i \ldots$, длина которых стремится к нулю, и выбирая в δ_i первую точку M_i производного множества $H_{x_0}^{(a_i)}$, мы имеем последовательность точек M_i, стремящуюся к точке M как пределу. Так как $a_i < a$, точка M_i имеет отвечающую ей пространственную точку N_i с аппликатою z_i. Обозначая через $\bar{z}$ *наибольший из пределов* чисел z_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, мы заставляем отвечать точке M число $\bar{z}$, которое мы рассматриваем как аппликату точки N, соответствующей точке M и имеющей M своей проекцией.

19. Определенный, таким образом, трансфинитный процесс может продолжаться вплоть до Ω, и он действительно продолжается до Ω, потому что имеются точки x_0 на множестве K, для которых тип вполне упорядоченного множества H_{x_0} есть $\omega^a + 1$, где a есть *любое* число второго класса.

Но для каждого отдельного числа x_0 указанный процесс непременно заканчивается на определенном трансфините, потому что раз тип вполне упорядоченного множества H_{x_0} есть $\omega^a + 1$, то это значит, что производная $H_{x_0}^{(a)}$ состоит из одной только точки, которую мы обозначим чрез M_{x_0}. Ясно, что на ней процесс Lebesgue'а и будет закончен, поставив ей в соответствие пространственную точку N_{x_0} с апликатою $z(x_0)$ и имеющую M_{x_0} своей проекцией.

Таким образом, на всякой прямой $x = x_0$, пересекающей проективное множество H, имеется самая верхняя точка M_{x_0}, совокупность которых образует, очевидно, *проективное униформное плоское множество, которое мы обозначим чрез* $\mathfrak{M}$.

Каждой точке M_{x_0} проективного множества $\mathfrak{M}$ отвечает определенная пространственная точка N_{x_0} с апликатою $z(x_0)$. Обозначим совокупность определенных таким образом точек N_{x_0} через $\mathfrak{N}$.

Это самое пространственное множество $\mathfrak{N}$ *и есть определенное трансфинитным процессом Lebesgue'а со связанными операциями, и ничто не заставляет думать, что* $\mathfrak{N}$ *есть проективное множество, и что множество* $\mathfrak{N}$ *можно определить еще каким-нибудь другим путем, при котором трансфинитное окажется совершенно исключенным.*

Обозначим чрез $\mathfrak{K}$ проекцию пространственного множества $\mathfrak{N}$ на плоскость XOZ. Ясно, что $\mathfrak{K}$ есть униформное множество, лежащее на плоскости XOZ и имеющее проективное множество $\mathfrak{K}$ своей проекцией на ось OX. Всякая точка m этого плоского множества $\mathfrak{K}$ имеет x_0 своею абсциссою и $z(x_0)$ своею ординатою.

Ничто a priori не доказывает, что $\mathfrak{K}$ есть проективное множество.

20. *Окончательная форма процесса Lebesgue'a.* Тем не менее, иногда определенное выше множество $\mathfrak{K}$ может оказаться *проективным*. Чтобы понять причину этого, достаточно заметить, что множество $\mathfrak{K}$ зависит от взятых в начале процесса действительных чисел $p_1, p_2, \dots p_n, \dots$, которые мы сделали отвечающими рациональным точкам $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$ интервала $(0 < y < 1)$ оси OY. Например, если действительные числа p_n взяты все равными между собой: $p = p_1 = p_2 = \dots = p_n = \dots = 1$, то ясно, что множество $\mathfrak{K}$ будет конгруэнтно множеству K и, следовательно, само будет проективным.

Чтобы избежать этого, Lebesgue делает следующее: множество рациональных точек $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n, \dots$ интервала $(0 < y < 1)$ он разбивает на счетное число *всюду плотных на интервале* $(0 < y < 1)$ множеств $D_1, D_2, \dots D_\nu, \dots$

$$D_1 = \{ \rho_{n_{11}}, \rho_{n_{12}} \dots \rho_{n_{1\nu}}, \dots \}$$
$$D_2 = \{ \rho_{n_{21}}, \rho_{n_{22}}, \dots \rho_{n_{2\nu}}, \dots \}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$D_\nu = \{ \rho_{n_{\nu 1}}, \rho_{n_{\nu 2}}, \dots \rho_{n_{\nu\nu}}, \dots \}$$

и затем, расположив заранее *все* многочлены с рациональными коэфициентами от действительного аргумента t в простую бесконечную последовательность

$$p_1(t), \ p_2(t), \dots p_\nu(t), \dots,$$

Lebesgue *заставляет отвечать каждой рациональной точке* $\rho_{n_{\nu i}} (i = 1, 2, 3, \dots)$ *множества D_ν один и тот же самый многочлен $p_\nu(t)$.*

Так как совокупность чисел n_{ij} совпадает с натуральным рядом $1, 2, 3, \dots$, то всякая рациональная точка ρ_k интервала ($0 < y < 1$) имеет отвечающее ей действительное число $p_n(t)$, зависящее от аргумента t.

Вследствие этого само плоское униформное множество $\mathfrak{K}$ теперь оказывается уже зависящим от аргумента t, равно как и функция $z(x_0)$, определенная на проективном множестве K в итоге всего трансфинитного процесса. Поэтому становится целесообразным написать полученную функцию в виде

$$z = \varphi(t, x),$$

где x есть точка множества K.

Из самого определения функции Lebesgue'а $\varphi(t, x)$ ясно, что для всякого фиксированного x_0, принадлежащего к проективному множеству K, функция $\varphi(t, x_0)$ аргумента t входит в классификацию Baire'а, и что каждая заранее заданная функция $f(t)$ аргумента t, входящая в классификацию Baire'а, может быть получена из функции Lebesgue'а при надлежащем выборе точки x_0, т. е. так, чтобы имелось тождество

$$f(t) \equiv \varphi(t, x_0)$$

для всякой величины аргумента t.

Поэтому, если функцию Lebesgue'а $z = \varphi(t, x)$ изобразим в виде униформной поверхности в трехмерном пространстве $OXTZ$, то эта поверхность разрезается плоскостями $x = x_0$, где x_0 принадлежит к проективному множеству K по всем возможным униформным кривым измеримым B и только по кривым измеримым B. Следовательно, *поверхность* $z = \varphi(t, x)$ *есть универсальная по отношению ко всем кривым измеримым* B.

Но поверхность эта определена существенно с трансфинитной последовательностью операций, из которых каждая зависит от всех предыдущих, и ничто не доказывает, что здесь трансфинитное может быть исключено.

Если невозможность исключения трансфинитного здесь будет строго установлена, среди семейства множеств этого рода можно ожидать встретить множества с удивительными свойствами.

21. *Примечания.* К сказанному полезно прибавить следующее: задача построения эффективной поверхности универсальной по отношению ко всем кривым измеримым B

представляет неоспоримый интерес, *когда хотят, чтобы эта поверхность была наипростейшего типа.*

В моих *Leçons sur les ensembles analytiques* (стр. 317) я доказал, что такою поверхностью служит некоторая специально построенная *проективная поверхность класса не выше 2.*

Проф. В. Серпинский недавно пошел много дальше показав, что такую поверхность можно построить соединением двух униформных и не перекрывающихся множеств, одно из которых есть типа A_ρ, а другое — *аналитическое дополнение.*

Было бы интересно иметь искомую универсальную поверхность одного лишь типа A_ρ, или еще интереснее было бы иметь ее одним лишь аналитическим дополнением.

Второе замечание относится к конституантам. Мы всюду в предыдущем говорили лишь о конституантах $\mathcal{E}_\alpha$ аналитического дополнения $\mathcal{E}$, т. е. о так называемых *внешних конституантах*. Но само аналитическое множество E также разбивается на свои собственные конституанты E_α, называемые *внутренними конституантами.* Сотрудник Математического института АН А. А. Ляпунов недавно привлек мое внимание на то, что результаты теории исключения трансфинитного сохраняют свою силу и для внутренних конституант. Так, например, можно сразу же утверждать что ряды $E_1 + E_\omega + E_{\omega^2} + \ldots + E_{\omega^\omega} + \ldots + E_{\omega^\alpha} + \ldots \ldots | \Omega$, и др. суть *проективные множества.* Для этой цели А. А. Ляпунов устанавливает, что если мы применим теорему С. Мазуркевича и изобразим данное линейное аналитическое множество E как проекцию униформного аналитического дополнения H, то всякая конституанта H_α аналитического дополнения H проектируется во внутреннюю конституанту E_α аналитического множества E. Это замечание позволяет без новых рассуждений перенести результаты теории исключения на внутренние конституанты.

ИЗЫСКАНИЯ П. С. НОВИКОВА.

22. *Характер исследований.* Изыскания эти посвящены, главным образом, *переносу принципов отделимости* теории аналитических множеств на множества других семейств.

В этом отношении нашим автором были подвергнуты исследованию три семейства множеств:

(α) *C — множества*;

(β) *Проективные множества класса 2*;

(γ) *Множества, являющиеся проекциями униформных аналитических дополнений.*

Известно, что принципы отделимости аналитических множеств формулируются так:

Принцип I. *Всякие два аналитических множества отделимы* (B).

Принцип II. *Удаляя общую часть двух пересекающихся аналитических множеств, мы имеем оставшиеся от них части отделимыми друг от друга аналитическими дополнениями.*

Известно далее, что всякое аналитическое множество есть проекция множества измеримого B, что аналитические дополнения совпадают с аналитическими множествами лишь в случае измеримости B, и что проективные множества класса n разделяются на 3 семейства:

1° Семейство $PCPC\ldots PE$, где E измеримо B, и где буква P, обозначающая операцию проектирования и чередующаяся с буквою C, обозначающей операцию взятия дополнения, написана в точности n раз; это семейство обозначается символом A_n, и множества, образующие его, называются ***аналитическими множествами класса n***;

2° Семейство $CPCPC\ldots PE$, где буква P написана n раз, обозначается символом CA_n; множества, образующие его, называются *аналитическими дополнениями класса n*;

3° Семейство множеств, которые суть одновременно и A_n и CA_n, обозначается символом B_n; множества, образующие его, называются *измеримыми B класса n*.

Ясно, что, делая $n=1$, мы получаем обычные аналитические множества, аналитические дополнения и множества измеримые B.

Известно, наконец, что эта классификация есть не только формальная, так как, каково бы ни было число n, фактически существуют множества, входящие в отдельности в любое из множеств: A_n, CA_n B_n, и которые не принадлежат ни к одному из предыдущих классов.

Целесообразным является введение еще особых символов для обозначения проекций униформных множеств CA_{n-1}:

семейство таких множеств обозначаем через A'_n. Семейство дополнительных к ним множеств обозначаем через CA'_n. И, наконец, семейство множеств, которые суть одновременно и A'_n и CA'_n, будет обозначаться через B'_n. Наконец, семейство „C-множеств", введенное, преждевременно скончавшимся геометром Евгением Августовичем Селивановским, определяется следующим образом:

Прежде всего вводится „операция решета": она состоит в том, что на прямых параллельных оси OX и взятых в счетном числе, помещаются некоторые, заранее данные, множества точек; затем полученное плоское множество со счетными сечениями рассматривается как решето C, определяющее линейное множество E, образованное теми точками x оси OX, где перпендикуляр P_x встречает решето C в множестве точек R_x, которое *не есть вполне упорядоченное* по отношению к положительному направлению оси OY. Полученное множество E и называется *множеством, определенным операцией решета*, проделанной над заданными множествами, помещенными на указанных прямых параллельных оси OX.

Семейство „C-множеств" определяется теперь так: *это есть наименьшее из семейств, содержащих интервалы и инвариантное по отношению к двум операциям: операции решета и операции взятия дополнения.*

Семейство всех C-множеств допускает точную классификацию того же самого трансфинитного характера, как и классификация Baire'a.

Именно, все семейство C-множеств разбивается на классы

$$C_0,\ C_1,\ C_2, \ldots, C_\omega, \ldots, C_\alpha, \ldots \ldots \mid \Omega,$$

где *начальный класс C_0 обозначает совокупность всех аналитических множеств, и где каждый класс C_α обозначает совокупность всех множеств, не входящих в предыдущие классы и получаемые операцией решета, проделанной над множествами предыдущих классов и их дополнениями.*

Такая классификация была предложена Е. А. Селивановским, доказавшим непустоту каждого класса, измеримость Lebesgue'a и свойство Baire'a всякого C-множества.

Нам нужно еще одно определение: пусть S есть некоторое семейство множеств, инвариантное по отношению к операциям счетной суммы и счетного произведения; пусть B_s есть совокупность всех множеств, входящих в S, *также как и их дополнения*.

Условимся, согласно П. С. Новикову, назвать B_s *максимальным телом* B *в семействе* S. Ясно, что в семействе всех аналитических множеств максимальным телом B будет совокупность всех множеств измеримых B.

В качестве приложения этого понятия обозначим через S_α совокупность всех C-множеств, содержащихся в классе C_α и во всех предшествующих классах; легко видеть, что S_α, есть семейство множеств, инвариантное по отношению к операциям счетной суммы и счетного произведения. Обозначим B_{s_α} максимальное тело B в семействе S_α. Очевидно, нужно ждать, что свойства этого максимального тела B_{s_α} имеют много общего со свойствами совокупности всех множеств измеримых B по отношению к семейству всех аналитических множеств. Исследования нашего автора вполне оправдывают это ожидание.

23. После введения этих понятий, определений и обозначений возвратимся к изысканиям П. С. Новикова.

Как уже было указано, они относятся в первую очередь к *переносу принципов отделимости* теории аналитических множеств на множества трех семейств: 1° *C-множества*, 2° *множества* A_2 и CA_2 и 3° *множества* A'_2 и CA'_2.

В этом отношении автором получены результаты исключительного значения, так как проблема отделимости проективных множеств при современном состоянии науки казалась совершенно безнадежной. Проблема эта более 10 лет ждала своего решения и только в работах П. С. Новикова получила точное и совершенно неожиданное решение.

Забегая вперед, мы теперь же отмечаем глубину изысканий нашего автора и большую силу его результатов. Это можно усмотреть хотя бы из того факта, что если проблема отделимости C-множеств решена автором в направлении, которого все ожидали и которое можно было предвидеть („всякие два множества C_α, не имеющие общей точки, отделимы посредством множеств B_{s_α}“, „всякие два перекрывающиеся множества C_α по удалении общей части отделимы двумя дополнениями к множествам C_α“), так что здесь были нужны лишь настойчивость и терпение, то, наоборот, проблема отделимости проективных множеств второго класса решена автором в таком направлении, которого никто не ожидал и которое для всех явилось удивительным: совершенно естественно было ждать отделимости B_2 для двух A_2, не имеющих общей точки. И, однако, это как-раз и оказалось неверным, так как отделимы (B_2) не два не перекрывающихся A_2, а *два не перекрывающихся* CA_2. Оказывается, что все законы отделимости, имеющие силу в теории аналитических множеств, продолжают быть действительными и для проективных множеств второго класса, но только в обратном смысле, говоря образно: „навыворот“: роль аналитических множеств играет не A_2, а CA_2; роль аналитических дополнений играет не CA_2, а само A_2; и лишь роль B_2 аналогична *до известной степени, впрочем*, роли множеств измеримых B.

Подобная инверсия законов отделимости во втором классе проективных множеств является сюрпризом; *такой* отделимости никто не ожидал и после этих результатов автора, делается понятным безуспешность всех делавшихся попыток открыть отделимость в теории проективных множеств 2-го класса: попытки эти, оказывается, делались в том направлении, где успех был невозможным, так как отделимость лежала в диаметрально противоположном направлении. Чтобы сделать эти открытия, нужны были исключительные проницательность и глубина. Достаточно указать, что даже такие острые исследователи проективных множеств, каковы ленинградские талантливые молодые математики: Канторович и Ливенсон, выработавшие особые тонкие приемы исследования проективных множеств 2-го класса и внесшие важную долю в прогресс их теории (*„всякое С-множество есть проективное множество второго класса“*), даже и они были вынуждены отступить перед трудностями теории отделимости в проективных множествах второго класса. Эта отделимость лежала так глубоко, что для ее открытия необходимы были математические инструменты очень большой силы, которых не было в руках других исследователей: для более слабых средств теория эта недоступна. Одним из таких сильных инструментов является, например, понятие *минимального индекса пространственного решета относительно прямой*, введенное нашим автором.

Не следует притом упускать из вида особого свойства той области, где протекали эти изыскания, которое делало их действительно трудными: в этой области обычно уже самая постановка проблемы делает сразу же ясным путь к ее решению; но если в самой постановке проблемы не содержится указаний на такой путь, проблема выглядит безнадежной и может десятки лет ждать своего решения. В этом отношении эта область исследований имеет много общего с исследованиями по труднейшим проблемам Теории чисел.

Характер исследований П. С. Новикова другой, чем характер исследований, изложенных нами ранее: эти последние имеют целью лишь наметить новые пути изысканий и поэтому не имеют характера законченности. Тогда как результаты П. С. Новикова по своей законченности приближаются к классическим.

В дальнейшем мы лишь вкратце изложим результаты П. С. Новикова, так как дело говорит само за себя и не нуждается в комментариях.

24. *Понятие правильного решета.* Это понятие является первым ценным инструментом, выработанным автором для проведения его изысканий.

Решето называется *правильным*, если всякая прямая параллельная вертикальной оси встречает решето: *либо* в вполне упорядоченном множестве по отношению к положительному направлению этой оси, *либо* в множестве точек, которое не есть „clairsemé" (в смысле A. Denjoy).

Теорема. *Всякое аналитическое множество определимо правильным решетом, составленным из счетного числа интервалов параллельных оси OX*

Предложение это весьма важное и лежит в основе всех дальнейших рассуждений автора.

25. *Максимальное тело.* Другим ценным вспомогательным инструментом исследователя является понятие *максимального тела B, содержащегося в данном семействе S множеств.*

Максимальное тело B в данном семействе S обозначается символом B_s.

По самому определению, *максимальным телом B в данной системе S множеств называется совокупность множеств системы S, инвариантная по отношению к операциям: сумма,* *разность и произведение, и такая, которая не может быть пополненной ни одним множеством из системы S без того, чтобы не утратить указанную инвариантность.*

Когда само данное семейство S инвариантно по отношению к операциям: *счетная сумма* и *счетное произведение*, тогда *существование* и *единственность* максимального тела B_s доказывается немедленно: тело B_s получается, беря в семействе все такие и только такие множества E, дополнения которых CE также входят в семейство S.

В семействе S всех аналитических множеств максимальное тело B_s есть совокупность всех множеств измеримых B.

Определение других максимальных тел в данной системе множеств S (напр. максимального аналитического тела и т. д.) не требуется в работе П. С. Новикова.

26. *Теория отделимости в семействе* C-множеств. Мы уже указали, что работами Канторовича и Ливенсона установлена *принадлежность всех C-множеств к семейству проективных множеств второго класса.*

Поэтому изучение C-множеств является как бы вступлением в теорию проективных множеств второго класса и вследствие этого представляет существенный интерес. Несмотря на то, что классификация C-множеств аналогична классификации множеств измеримых B, оставалось до сих пор неизвестным, имеют ли силу для C-множеств теоремы отделимости. В мемуаре Канторовича и Ливенсона на это не содержится ни малейших указаний. Для П. С. Новикова область C-множеств является как бы пробою его сил. Пользуясь исключительно элементарными *геометрическими* образами, П. С. Новиков с большою глубиною исследует их свойства; как результат его анализа вытекает то важное следствие, что в теории C-множеств имеют место те же самые теоремы отделимости, как и для аналитических множеств и их дополнений. Важно заметить, что отделимость C-множеств и аналитических множеств происходит *в том же самом смысле* (а не в обратном).

Ключом в теории отделимости C-множеств является следующее важное предложение:

Лемма. *Пусть даны два решета C' и C'', составленные из C-множеств или класса $< \alpha$, или класса α и принадлежащих к максимальному телу этого класса, причем мно-*

жества эти расположены на прямых параллельных оси OX; *тогда множества тех точек* x, *где* R'_x *подобно части* R''_x, *есть* C*-множество класса* a.

Раз эта основная лемма доказана, из нее тотчас же вытекают следующие два принципа отделимости C-множеств:

Принцип I. *Каждые два* C*-множества класса* a *без общей точки отделимы двумя* C*-множествами максимального тела класса* a.

Принцип II. *Если у двух пересекающихся* C*-множеств класса* a *удалить их общую часть, тогда оставшиеся части отделимы множествами, дополнительными к* C*-множествам класса* a.

Так же точно остается в силе кратная отделимость, как показывают теоремы:

Теорема. *Пусть* E_1 $E_2, \ldots$ *есть счетная последовательность* C*-множеств класса* a, *для которой* $E_1 \times E_2 \times \ldots = 0$; *тогда имеется счетная последовательность* C*-множеств максимального тела класса* a, $H_1, H_2, \ldots$ *такая, что* $E_i < H_i$ *и* $H_1 \times H_2 \times \ldots = 0$.

Теорема. *Если у* C*-множеств* E_1, $E_2, \ldots$ *класса* a *удалить общую всем им часть, то оставшиеся части кратноотделимы множествами, дополнительными к* C*-множествам класса* a, *т. е. имеются множества* H_1, H_2, ... *дополнительные к* C*-множествам класса* a, *такие, что* $E_i < H_i$ *и* $H_1 \times H_2 \times \ldots = 0$.

Мы напоминаем, что *максимальным телом класса* a называется максимальное тело B_{s_α} семейства S_α, составленного из C-множеств классов $< a$ и из самого C_α.

27. *Теория отделимости в семействе проективных множеств второго класса.* Мы уже указали, что результаты этой работы П. С. Новикова, трактующей законы отделимости всех вообще проективных множеств класса 2, представляют исключительную ценность для современного состояния науки. Автор устанавливает в этой работе законы отделимости для проективных множеств второго класса, причем совершенно неожиданным является тот его результат, что отделимость эта совершается в обратном смысле, чем для аналитических множеств и их дополнений. Именно, множества A_2 оказываются аналогичны не самим аналитическим множествам, а их дополнениям; множества же CA_2

оказываются аналогичными самим аналитическим множествам, что же касается до множеств B_2, то они аналогичны множествам измеримым B.

Результат этот, совершенно экстраординарный, должен сделать понятной неудачу тех многочисленных попыток, которые делались для проективных множеств 2-го класса, где искали установления законов отделимости в том же самом смысле, как и для аналитических множеств и их дополнений, а не в обратном.

Здесь рассмотрения автора являются еще более глубокими и сильными, чем в предыдущей работе.

Основным инструментом, который открывает дорогу для дедукций автора, является сильное и прекрасное понятие *индекса пространственного решета относительно данной плоскости*.

Пусть в пространстве $OXYZ$ имеется какое-нибудь множество точек C, которое мы рассматриваем как пространственное решето, т. е. как просеивающий аппарат для точек M плоскости XOY, для которых $R_м$ есть вполне упорядоченное множество по отношению к положительному направлению оси OZ. Обозначим через Π_x плоскость, проведенную через точку x оси OX перпендикулярно к этой оси. Эта плоскость Π_x пересечет пространственное решето C по плоскому решету, которое естественно обозначить чрез C_x. Это плоское решето определяет линейное аналитическое дополнение $\mathcal{E}_x$, являющееся разрезом плоского аналитического дополнения $\mathcal{E}$, определенного пространственным решетом C, перпендикуляром P_x, лежащим в плоскости XOY и восстановленным в точке x оси OX к этой оси. Обозначим через a_x индекс наименьшей конституанты, фактически имеющей точки на перпендикуляре P_x. Если таких точек совсем нет, т. е. если P_x не пересекает плоское аналитическое дополнение $\mathcal{E}$, тогда мы полагаем по определению $a_x = \Omega$.

Это число a_x и называется индексом пространственного решета C относительно плоскости Π_x.

Ключом в теории отделимости проективных множеств 2-го класса служит следующее важное предложение:

Лемма. *Пусть даны два пространственных решета C' и C'', составленные из счетного числа прямоугольников,* *параллельных плоскости XOY и ориентированных по этим осям; предполагается, что решета эти правильные и такие, что нет точки x_0 для которой $\alpha'_{x_0}=\alpha''_{x_0}<\Omega$. В этих условиях совокупность точек x, для которых $\alpha'_x<\alpha''_x$, есть множество типа A_2.*

Раз эта основная лемма доказана, из нее тотчас же вытекают следующие два принципа отделимости проективных множеств второго класса:

Принцип I. *Всякие два множества CA_2 без общей точки отделимы* (B_2).

Принцип II. *Если у двух пересекающихся множеств CA_2 удалить их общую часть, тогда оставшиеся части отделимы* (A_2), *если у двух пересекающихся множеств A_2 удалить их общую часть, тогда оставшиеся части отделимы* (A_2).

Кратная отделимость, введенная впервые П. С. Новиковым, также протекает в обратном смысле, чем в теории аналитических множеств.

Теорема. *Пусть E_1, E_2 ... есть счетная последовательность множеств CA_2, для которой $E_1\times E_2\times\ldots=0$; тогда имеется счетная последовательность множеств B_2, H_1, H_2, ..., такая, что $E_i<H_i$ и $H_1\times H_2\times\ldots=0$.*

Теорема. *Если удалить общую часть счетной последовательности множеств CA_2, E_1 E_2, ..., оставшиеся части кратно отделимы множествами* (A_2).

28. *Теория отделимости в семействе проекций униформных аналитических дополнений. Свойства этих проекций.*

Эти изыскания П. С. Новикова являются, собственно, центром всей его работы по теории отделимости. Здесь автор, ободренный удачею предыдущих исследований, приступает и доводит до конца изыскания, которые при современном состоянии науки можно было считать безнадежными.

Давно уже было известно после исследований С. Мазуркевича и В. Серпинского, что *всякое аналитическое множество есть A'_2* (т. е. проекция униформного аналитического дополнения. Мы напомним обозначения § 22: A'_2—есть семейство всех проекций униформных аналитических дополнений; CA'_2 — есть семейство дополнений к множествам, образующим семейство A'_2; и B'_2 — есть семейство всех множеств, входящих одновременно в A'_2 и в CA'_2). Это составляет основной результат С. Мазуркевича. Серпинский распространил его на все те множества, которые получаются из аналитических множеств и их дополнений путем двух операций:

1° *сумма счетного (конечного) числа* неперекрывающихся *множеств (т. е. сумма в узком смысле)*;

2° *произведение счетного (конечного) числа множеств.*

Из этих исследований С. Мазуркевича и В. Серпинского вытекает, что все множества *минимального тела*, содержащего аналитические множества и их дополнения (иначе говоря, минимальной системы множеств, содержащей все аналитические множества и их дополнения и инвариантной по отношению к операциям суммы (*в широком смысле*) и произведению счетного числа множеств; по отношению же к операции разности двух множеств эта минимальная система будет автоматически инвариантна, т. е. без каких-либо добавочных условий), суть опять A'_2. Эти результаты В. Серпинского были обязаны двум следующим леммам, им доказанным:

Лемма I. Если E_1, $E_2, \ldots$ суть множества A'_2 и если *они* попарно не перекрываются, то сумма их $E_1 + E_2 + \ldots$ есть также A'_2.

Лемма II. *Если* E_1, $E_2 \ldots$ *суть множества* A'_2 *то произведение их* $E_1 \times E_2 \times \ldots$ *есть также* A'_2.

В этом виде теория проекций униформных аналитических дополнений долгое время оставалась без изменения. Атаки, которые велись на лемму I В. Серпинского с тем, чтобы уничтожить в ней слова: *„если они попарно не перекрываются“*, до сих пор оставались безуспешными.

Чтобы пробить брешь в этом труднейшем вопросе, П. С. Новиков ввел новое, очень простое и глубокое понятие *точки трансфинитной единственности.*

Содержание его следующее: пусть в пространстве n измерений $OX_1\ X_2\ \ldots X_n$ находится аналитическое дополнение $\mathscr{E}$, определенное решетом C, находящимся в пространстве OX_1, $X_2 \ldots\ X_n Y$, число измерений которого есть $n+1$. Мы предполагаем решето C состоящим из прямоугольных частей n измерений, ориентированных по осям OX_1, OX_2, $\ldots$, OX_n и находящихся в счетном числе. Если $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть точка пространства OX_1, $X_2 \ldots\ X_n$ и P_M

прямая параллельная оси OY и проходящая через точку M, то чрез $R_м$ мы обозначаем линейное счетное множество, являющееся пересечением решета C прямой $P_м$. Аналитическое дополнение $\mathcal{E}$ есть совокупность всех точек M, таких, что $R_м$ есть вполне упорядоченное множество в положительном направлении оси OY.

Пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_\omega + \ldots + \mathcal{E}_\alpha + \ldots \ldots | \Omega$ есть разложение аналитического дополнения $\mathcal{E}$ по его конституантам; здесь $\mathcal{E}_\alpha$ есть совокупность точек M таких, что тип вполне упорядоченного множества $R_м$ в точности равен α.

Введя эти обозначения и данные, обозначим чрез $H_{x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0}$ часть пространства n измерений $OX_1 X_2 \ldots X_n$, получающуюся, фиксируя первые m координат подвижной точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots x_n)$, полагая $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_m = x_m^0$, и заставляя оставшиеся переменные $x_{m+1}, \ldots x_n$, изменяться независимо друг от друга от $-\infty$ до $+\infty$; движущаяся точка M опишет в этом случае рассматриваемое многообразие $H_{x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0}$, число измерений которого, очевидно, равно разности $n - m$. Здесь мы предполагаем, что $1 \leqslant m \leqslant n - 1$.

Многообразие $H_{x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0}$ содержит в себе точки данного аналитического дополнения $\mathcal{E}$; мы обозначаем через $\mathcal{E}_{x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0}$ часть множества $\mathcal{E}$, принадлежащую к $H_{x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0}$. Обозначая через $\mathcal{E}_\alpha(x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0)$ часть конституанты $\mathcal{E}_\alpha$, находящуюся в многообразии $H_{x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0}$, мы, очевидно, имеем разложение

$$\mathcal{E}_{x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0} = \mathcal{E}_0(x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0) + \mathcal{E}_1(x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0) + \ldots +$$
$$+ \mathcal{E}_\alpha(x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0) + \ldots | \Omega \qquad (25$$

Многообразие $H_{x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0}$ называется *критическим*, если первая непустая конституанта $\mathcal{E}_\beta(x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0)$ разложения (25) состоит из одной только точки, которую обозначим чрез M_0

и которую будем называть *точкою трансфинитной единственности аналитического дополнения* $\mathscr{E}$.

Ясно, что точка M_0 имеет своими первыми m координатами числа $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$, определяющие рассматриваемое критическое многообразие $H_{x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0}$; ясно далее, что остальные $n-m$ координат $x_{m+1} \ldots x_n$ точки M_0 определены единственным образом знанием первых m координат $x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0$. Поэтому, если все координаты точки M_0 обозначим чрез $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, то имеем

$$x_{m+1}^0 = \varphi_1(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0), \ldots \quad x_n^0 = \varphi_{n-m}(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0).$$

Ясно, наконец, что функции эти $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-m}$ определены вообще не для всякой системы m действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m$ потому, что не всякое многообразие $H_{x_1 x_2 \ldots x_m}$ есть критическое.

Совокупность всех точек M_0 трансфинитной единственности в пространстве $OX_1 X_2 \ldots X_n$ получаемая допустимым изменением координат $x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0$, называется *множеством трансфинитной единственности* аналитического дополнения $\mathscr{E}$. Мы его обозначим чрез $\mathfrak{M}_{1, 2, \ldots, m}$; значки $1, 2, \ldots, m$ должны напоминать о том, что рассматриваются критические многообразия $n-m$ измерений, получаемые фиксированием m *первых* координат; подобным же образом, символ $\mathfrak{M}_{\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_m}$ обозначают множество трансфинитной единственности, получаемое отбором точек трансфинитной единственности в критических многообразиях $H_{x_{\kappa_1}^0, x_{\kappa_2}^0 \ldots x_{\kappa_m}^0}$.

Понятие точки трансфинитной единственности оказывается весьма острым инструментом, приводимым в действие следующим важным предложением:

Лемма. *Множество точек трансфинитной единственности аналитического дополнения есть опять аналитическое дополнение.*

Раз эта основная лемма доказана, из нее тотчас же вытекает давно ожидаемое расширение леммы I В. Серпинского, в виде предложения первостепенной важности.

Теорема. *Сумма конечного или счетного числа множеств A_2' есть опять множество A_2'.*

Но центральным и совершенно парадоксальным результатом П. С. Новикова является тот, который дается предложением:

Теорема. *Существует униформная поверхность, которая есть аналитическое дополнение и которая есть универсальная по отношению ко всем плоским униформным аналитическим дополнениям.*

Из этой блестящей теоремы сразу же следует, что существует такое плоское множество точек A_2', которое является универсальным по отношению ко всем линейным множествам точек A_2'.

Отсюда следует, что пересечение прямой $x=y$ этого плоского универсального A_2' дает такое линейное A_2', дополнение которого уже не есть A_2'. Следовательно, *существуют* A_2', *которые не суть* B_2.

Но, с другой стороны, дополнение к множеству B_2 есть опять множество B_2. Поэтому: *семейство* A_2' *не тождественно с семейством* B_2.

Но каково в действительности взаимоотношение A_2' и B_2; содержится ли какое-нибудь из них в другом, или же они только перекрываются — это неизвестно. Вопрос этот исключительной трудности.

29. Ключом в теории отделимости множеств A_2', CA_2' и B является следующее важное предложение об униформизации плоских аналитических дополнений с конечными сечениями:

Лемма. *Всякое плоское аналитическое дополнение с конечными сечениями может быть униформизировано аналитическим дополнением.*

Это предложение означает, что если $\mathscr{E}$ есть плоское аналитическое дополнение, пересекающееся всякой прямой, параллельной оси OY не более, чем в конечном числе точек, тогда всегда можно отыскать такое униформное аналитическое дополнение $\mathscr{E}$, содержащееся в $\mathscr{E}$, которое имеет ту же самую проекцию на ось OX, как и все данное множество $\mathscr{E}$.

Доказывается эта лемма на основании предыдущей леммы относительно множеств трансфинитной единственности.

Раз эта основная лемма доказана, из нее тотчас же вытекают следующие два принципа отделимости множеств A_2', CA_2' и B_2':

Принцип I. *Каждые два множества CA_2' без общей точки отделимы* (B_2').

Принцип II. *Если у двух пересекающихся CA_2' удалить их общую часть, оставшиеся части отделимы* (A_2')*; если у двух пересекающихся A_2' удалить их общую часть, тогда оставшиеся части отделимы* (A_2').

Кратная отделимость выражается предложениями:

Теорема. *Всякая счетная последовательность множеств CA_2', для которой $E_1 \times E_2 \times \ldots = 0$ допускает кратную отделимость множествами B_2'.*

Теорема. *Если удалить общую часть счетной последовательности E_1, $E_2, \ldots$ множеств CA_2', оставшиеся части кратно отделимы множествами A_2'.*

Из этих теорем мы видим, что законы отделимости для множеств A_2', CA_2' и B_2' абсолютно тождественны с законами отделимости для множеств A_2, CA_2 и B_2, т. е. также протекают в обратном смысле, чем в теории аналитических множеств.

Это обстоятельство заставляет весьма серьезно поставить вопрос: *не существует ли в действительности тождества семейств A_2 и A_2'?*

Проблема о тождестве или различии A_2 и A_2' представляет исключительные трудности.

30. Частная попытка приблизиться к разрешению этого вопроса сделана П. С. Новиковым, поставившим вопрос о взаимоотношении семейства A_2' и семейства C-множеств.

Этот вопрос им разрешен до конца. Предложение, служащее ключом к этой проблеме, есть, в сущности, не что иное, как уточненная лемма II В. Серпинского. Это уточнение дается П. С. Новиковым в следующем виде:

Лемма. *Если E_1, $E_2, \ldots$ суть проекции плоских униформных аналитических дополнений $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2, \ldots$ определенных решетами C_1, $C_2 \ldots$, тогда произведение $E_1 \times E_2 \times \ldots$ есть проекция плоского униформного аналитического дополнения $\mathscr{E}$, определенного таким решетом C, что в каждой точке M,* *принадлежащей к $\mathscr{E}$, тип R_M в точности равен сумме типов R'_{M_1}, R''_{M_2}, ..., соответствующих решетам C', C'', ... в точках M_1, M_2, ... множеств $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$, ..., лежащих на прямой L, проходящей через M и параллельной оси OY.*

Доказательство этой леммы получается непосредственно из рассмотрения рассуждений В. Серпинского о том, что проекция счетного произведения A'_2 есть множество A'_2. То решето, которое там получается для $\mathscr{E}$ в этом рассуждении, как раз удовлетворяет условиям леммы П. С. Новикова.

Из этой леммы П. С. Новикова после длинных и технически сложных рассуждений следует предложение, представляющее самостоятельный интерес:

Теорема. *Всякое C-множество есть A'_2.*

Это предложение есть большое заострение предложения, впервые установленного Канторовичем и Ливенсоном о том, что „всякое C-множество есть проективное множество 2-го класса".

И, вместе с тем, делается еще более ясной необходимость *или* отыскать такое A_2, которое не есть A'_2, *или* установить тождество семейств A_2 и A'_2.

31. *Общая униформизация плоского аналитического дополнения.* Мы видели (см. § 29), что плоское аналитическое дополнение $\mathscr{E}$ с конечными сечениями униформизируется опять аналитическим дополнением.

Естественно поставить вопрос, *нельзя ли униформизировать вообще всякое плоское аналитическое дополнение $\mathscr{E}$, не делая никаких частных предположений относительно его сечений прямыми параллельными оси OY?*

П. С. Новиков ответил утвердительно на этот вопрос, доказав следующее важное предложение:

Теорема. *Всякое плоское аналитическое дополнение может быть униформизировано множеством A_2.*

Процесс, который дает П. С. Новиков, *существенно трансфинитен* и позволяет во всяком непустом аналитическом дополнении указать индивидуальную точку. Но, как показывает самый финальный результат, трансфинитное, в конце концов, исключимо, и в итоге мы имеем *проективное множество* и даже A_2.

Отмечу, что проблема об указании индивидуальной точки в непустом аналитическом дополнении мною была поставлена около двадцати лет тому назад, причем я неоднократно настаивал explicite в печати на ее значении как математическом, так и философском.

Совершенно очевидно, что здесь представляется самая настоятельная необходимость сделать дальнейшие изыскания о природе этого процесса, указывающего индивидуальную точку в непустом аналитическом дополнении, и должны быть выведены отсюда по возможности все следствия.

Сейчас пока преждевременно делать какие-нибудь выводы и заключения.

32. *Попытка классификации эффективного.* Изложенные результаты П. С. Новикова составляют содержание трех первых глав его диссертации, представленной в рукописи Академии Наук СССР на соискание звания доктора чистой математики. Насколько материал этих глав работы П. С. Новикова является законченным, давая совершенно ясную и точную картину исследуемых явлений и свойств, настолько последняя четвертая глава работы представляется сырой и незаконченной *даже в самом своем замысле.* Впрочем, глава эта, трактующая о множествах эффективных, в смысле H. Lebesgue'a. лишь весьма косвенно связана с проективными множествами вообще.

Основная идея этой главы состоит в розыскании такой классификации множеств, которая охватила бы не только проективные, но и вообще все множества, которые можно индивидуально определить [1].

В этой главе автор приступает к исследованию сюжета, который современная наука считала преждевременным даже формулировать и ставить в проблему.

Вкратце содержание этой главы следующее: автор строит весьма естественным образом такую классификацию множеств, за пределы которой мы не умеем выйти, употребив

[1] Lebesgue в своем знаменитом мемуаре *Sur les fonctions représentables analytiquement* (p. 215) пишет: „Итак, можно назвать (nommer) функцию, непредставимую аналитически, и то исследование, которое мы только что предприняли, не следует смешивать с изучением *функций, которые можно называть* (*fonctions qu'on peut nommer*), т е. с исследованием, к которому было бы интересно приступить".

даже столь могущественный прием, каким является применение *диагонали.* Классификация эта идет по **трансфинитам третьего класса**, и остается неизвестным, распространяется ли она, действительно, на *все* трансфинитные числа третьего класса, или же только на **их сегмент**.

При настоящем состоянии науки и имея в руках лишь указанный сырой материал, является преждевременным какое-нибудь умозаключение об удаче этой смелой попытки П. С. Новикова. Но самое построение, даваемое им, и проблемы, с ним связанные, столь интересны, что весь замысел этой четвертой главы следует, безусловно, рассматривать, как начало большой и очень важной работы. Здесь интересно отметить, что решение вопроса о том, доходит ли его классификация до первого трансфинита четвертого класса, или кончается раньше, является чрезвычайно интересным, так как и в том и в другом случае получили бы такие решения проблемы, которые нам сейчас кажутся безнадежными.

33. Ввиду значительного интереса этой попытки П. С. Новикова мы приводим ее здесь целиком, отбросив, впрочем, некоторые детали, которые нам кажутся лежащими в стороне от главной идеи. Сам автор посвятил этому предмету всего лишь три страницы, дав на протяжении их только контур своего замысла. Так как восстанавливать всю конструкцию приходится лишь по ее скелету, то само собой разумеется, что лично на меня должна падать ответственность за возможное непонимание или искажение смысла.

I. *Вполне упорядоченная система униформных множеств.* Возьмем плоскость XOY и на ней систему $S = \{E\}$ униформных множеств E.

Мы предполагаем:

1° *Что никакие два множества E' и E'' системы S не имеют общей точки*;

2° *Что проекции Π' и Π'' двух любых множеств E' и E'' системы S содержатся одна в другой*;

3° *Что, если обозначим через E совокупность всех точек XOY плоскости, лежащих соответственно строго ниже точек множества E', то, если множество E'' содержит хотя бы одну точку множества E, тогда оно должно содержать и все точки множества E, абсцисса которых принадлежит произведению $\Pi' \times \Pi''$.*

К пояснению описанных свойств системы униформных множеств S следует добавить, что сказанное в пунктах 1°, 2° и 3° выражает лишь то обстоятельство, что из двух любых множеств E' и E'' системы S одно непременно лежит ниже другого, и что если E' лежит ниже E'' и E'' расположено ниже E''', то E' находится ниже E'''.

Таким образом, система $S=\{E\}$ униформных множеств E, обладающая свойствами 1°, 2° и 3°, есть система *упорядоченная*.

Система $S=\{E\}$ униформных множеств называется *вполне упорядоченной*, если всякая ее часть имеет первый элемент, т. е. если всякая часть S_1 системы S имеет самое нижнее в ней униформное множество E_1.

В дальнейшем мы будем рассматривать исключительно одни лишь вполне упорядоченные системы $S=\{E\}$ униформных множеств E. Мы особенно настаиваем на том, что *факт полной упорядоченности системы S в силу свойств 1°, 2° и 3°, есть* чисто геометрический *факт*, и что поэтому одна и та же самая система S униформных множеств не может оказаться и вполне упорядоченной, и не вполне упорядоченной: *здесь должно иметься что-либо только одно* (ср. напр. множество всех рациональных точек, которое можно рассматривать: *и* как не вполне упорядоченное, *и* как вполне упорядоченное в зависимости от предварительного определения порядка следования элементов множества один за другим: в системе S этой неопределенности быть не может, потому что этот порядок следования определяется свойствами 1°, 2° и 3°, следовательно, *чисто геометрически*, и раз система S *геометрически дана* своими отдельными множествами — элементами E, то этим самым уже установлен порядок следования один за другим ее элементов, и, значит, факт полной упорядоченности системы S есть чисто геометрический факт, не зависящий ни от каких других дополнительных условий).

II. *Мощность вполне упорядоченной системы S.* Первый вопрос, подлежащий выяснению, это вопрос о том, какую мощность может иметь вполне упорядоченная система S униформных множеств E?

Легко видеть, что *ее мощность не может превосходить* $\aleph_1$.

Для того чтобы видеть это, обозначим через H совокупность точек, принадлежащих множествам системы S. Следовательно, H есть соединение всех множеств E системы S. В силу того, что система S есть вполне упорядоченная, плоское множество точек H есть *множество с вполне упорядоченными сечениями*, которые поэтому должны быть счетными.

Обозначим чрез h проекцию плоского множества H на ось OX. Если x принадлежит к h, перпендикуляр P_x встретит плоское множество H во вполне упорядоченном множестве R_x типа γ_x. Обозначим чрез h_α совокупность точек x множества h, для которых $\gamma_x = \alpha$. Ясно, что в силу этих обозначений мы имеем трансфинитное разложение

$$h = h_1 + h_2 + \ldots + h_\omega + \ldots + h_\alpha + \ldots\ldots \mid \Omega \qquad (26)$$

Обозначим через H_α совокупность точек множества H, имеющих свои проекции принадлежащими к множеству h_α. Ясно, что имеем разложение

$$H = H_1 + H_2 + \ldots + H_\omega + \ldots + H_\alpha + \ldots\ldots \mid \Omega \qquad (27)$$

Так как перпендикуляр P_x, когда x пробегает множество h_α, встречает множество H_α по вполне упорядоченному множеству R_x типа, в точности равного α, то это множество H_α можно представить как соединение счетного числа униформных множеств e, $H_\alpha = \{e\}$, каждое из которых имеет проекцию на ось OX тождественной множеству h_α, идущих вверх вполне упорядоченным множеством типа в точности равного α.

Мы теперь утверждаем, что *множества E, составляющие систему S и имеющие точки на множестве e образуют счетное множество*. Действительно, если бы дело было иначе, тогда среди множеств e имеется самое нижнее, пусть e_{α_0}, содержащее точки несчетного числа множеств E, пусть этими множествами E будут:

$$E_{\beta_0},\ E_{\beta_1},\ \ldots\ E_{\beta_\omega},\ \ldots\ E_{\beta_\alpha},\ \ldots\ldots \mid \Omega,$$

где

$$\beta_0 < \beta_1 \ldots < \beta_\omega < \ldots\ldots\ \Omega;$$

мы при этом вовсе не предполагаем, что β_0, $\beta_1, \ldots$ суть трансфинитные числа второго класса: это может оказаться фактически неверным. То, что мы в праве предположить, это именно то, что ни одно из множеств $E_{\beta\alpha}$ не имеет точек ниже множества e_{α_0}: действительно, множества $E_{\beta\alpha}$, имеющие точки ниже множества e_{α_0}, могут иметься лишь в счетном числе, потому что иначе e_{α_0} не было бы самым нижним множеством соединения H_α, содержащим точки несчетно — многих множеств E; но раз так, то мы можем из последовательности E_{β_0}, $E_{\beta_1}, \ldots$, $E_{\beta\omega}, \ldots$ $E_{\beta\alpha}, \ldots\ldots | \Omega$ просто вычеркнуть все те множества, которые имеют точки ниже множества e_{α_0}, и перенумеровать заново остальные индексами β_0, β_1, $\beta_2 \ldots$, $\beta_\omega, \ldots$ $\beta_\alpha, \ldots\ldots | \Omega$.

Итак, ни одно из множеств $E_{\beta\alpha}$ не имеет точек ниже множества e_{α_0}. Пусть M_0 есть точка множества E_{β_0}, лежащая на e_{α_0}; мы обозначим через m_0 проекцию точки M_0 на ось OX. Пусть M_1 есть точка множества E_{β_1}, принадлежащая к множеству e_{α_0}; пусть m_1 есть ее проекция на ось OX. Мы утверждаем, что перпендикуляр P_{m_1} не встречает множества E_{β_0}. Действительно, эта встреча невозможна, очевидно, ни ниже точки M_1, ни выше ее, ни в самой M_1. Отсюда следует, что m_1 не принадлежит к проекции множества E_{β_0}. Но проекция множества E_{β_0} в таком случае должна содержаться в проекции множества E_{β_1}. Это значит, что точка m_0 принадлежит к проекции множества E_{β_1}, и, значит, перпендикуляр P_{m_0} встречает наверное множество E_{β_1}. Ясно, что встреча эта должна быть *выше* точки M_0, т. е. должна произойти в некоторой точке N_1, лежащей на кривой e_{α_1}, где $\alpha_1 > \alpha_0$. Пусть теперь M_2 есть точка множества E_{β_2}, принадлежащая множеству e_{α_0}; пусть m_2 есть ее проекция на ось OX. Попрежнему, точка m_2 не может принадлежать проекции множества E_{β_0}. Значит, точка m_0 заведомо принадлежит к проекции множества E_{β_2} и, поэтому перпендикуляр P_{m_0} наверное пересечет множество E_{β_2}. Ясно, что эта точка пересечения, пусть N_2, должна быть *выше* точки N_1, т. е. должна находиться на кривой e_α, $\alpha_2 > \alpha_1 > \alpha_0$. *И так далее.*

Вообще точка M_γ множества $E_{\beta\gamma}$, принадлежащая множеству e_{α_0}, не имеет своей проекции m_γ на ось OX, входящей в проекцию множества E_{β_0}. Поэтому точка m_0 заведомо принадлежит к проекции множества $E_{\beta\gamma}$ и, значит, перпендикуляр P_{m_0} наверное пересечет множество $E_{\beta\gamma}$;

обозначим эту точку пересечения P_{m_0} с $E_{\beta\gamma}$ через N_γ; ясно, что она должна быть *выше* построенных ранее точек $M_0 = N_0$, $N_1, N_2 \ldots | \gamma$, т. е. должна находиться на множестве $e_{\alpha\gamma}$, где $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_\gamma$. Таким образом, мы приходим к тому, что перпендикуляр P_{m_0} пересекает несчетно много множеств $e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}, \ldots e_{\alpha\gamma}, \ldots \ldots | \Omega$, что невозможно, так как точки пересечения $N_0, N_1, N_2, \ldots, N_\gamma, \ldots \ldots | \Omega$ образуют вполне упорядоченное множество.

Вернемся к первоначальному положению вопроса. Мы установили, что точки множества H_α могут принадлежать лишь счетному (конечному) числу множеств E системы S. И так как число α обязательно есть *либо* конечное число, *либо* трансфинитное число второго класса, то множества E, имеющие свои точки на H, находятся, самое большее, в мощности $\aleph_1$. А так как, действительно, *всякое* множество E, входящее в состав системы S, фактически имеет все свои точки на множестве H, то отсюда следует, что мощность системы S не превышает $\aleph_1$ (ч. т. д.)

Как следствие мы получаем:

Тип вполне упорядоченной системы S униформных множеств E есть трансфинитное число третьего класса, или ниже.

Отметим при этом, что самое доказательство этого предложения дает больше, чем содержится в его формулировке, именно: *вполне упорядоченная система S униформных множеств E всегда может быть эффективно перенумерована числами конечными и трансфинитами второго класса.*

В дальнейшем мы будем обозначать этот тип через символ μ_s.

Итак, мы имеем *строгое неравенство*:

$$\mu_s < \Omega^*$$

где Ω^* обозначает первый трансфинит четвертого класса (по обычной символике: $\Omega = \Omega_1$ и $\Omega^* = \Omega_2$; мы не пользуемся ею, так как самое существование трансфинита четвертого класса Ω_2 нам представляется еще более условным, чем существование самого Ω).

III. *Обратная проблема о типе вполне упорядоченной системы S.* Здесь следовало бы поставить обратную проблему: дано произвольное трансфинитное число 3-го класса μ; узнать, существует ли такая вполне упорядоченная система S, составленная из униформных множеств E, $S = \{E\}$, тип которой в точности равен μ, $\mu_s = \mu$?

Здесь тонкость обратной проблемы состоит в определении самого смысла слов: *„дано трансфинитное число 3-го класса“*. Мы это понимаем так: сегмент порядковых чисел, отсекаемый „данным“ трансфинитным числом μ третьего класса, перенумерован трансфинитными числами второго класса. И самое *„задание“* трансфинита 3-го класса μ есть не что иное, как задание определенной нумерации сегмента порядковых чисел, предшествующих числу μ, при помощи трансфинитов второго класса.

Мы видим, что тонкость обратной проблемы сводится на еще большую тонкость, состоящую в определении тех *средств*, при помощи которых мы можем иметь фактические такие перенумерования.

Инструмент в виде вполне упорядоченной системы S униформных множеств E, введенный П. С. Новиковым и описанный в начале § 33, понятно, является весьма важным инструментом, но не следует переоценивать его силу. В самом деле, если вполне упорядоченная система $S = \{E\}$ нам дана чисто геометрически, т. е. только как множество всех точек плоскости, ей принадлежащих, и следовательно, еще в не расщепленном виде на униформные множества E, то ничто нам не позволяет выполнить такое расщепление из одних только геометрических соображений и, следовательно, мы в этом случае совсем не имеем никакого трансфинита μ_s. Для того, чтобы трансфинит третьего класса μ_s появился, система S *должна быть нам заранее заданной в расщепленном виде на униформные множества* E. Только тогда мы можем констатировать, есть или нет рассматриваемая система S вполне упорядоченная, и в этом последнем случае, как показывает II § 33 (см. стр. 64), *произвести фактическое перенумерование трансфинитами второго класса сегмента чисел, отсекаемого типом* μ_s.

Таким образом, процесс перенумерования сегмента, отсекаемого типом μ_s трансфинитами второго класса, производится лишь *после того*, как будет произведено расщепление системы на униформные множества E, т. е. *перенумерование сводится к расщеплению*.

Весьма вероятно (мы думаем, что дело здесь совсем элементарно и что остановка лишь за *техникой* нужного построения), что верно и обратное, т. е. что любое заранее „фиксированное“ перенумерование сегмента, отсекаемого трансфинитом μ третьего класса помощью трансфинитов второго класса влечет совершенно определенное построение вполне упорядоченной системы S уже расщепленной на униформные множества E, $S=\{E\}$ такой, что $\mu_s=\mu$.

Если это правильно (а это кажется верным, если судить по аналогии с существованием вполне упорядоченных систем S, тип которых μ_s есть наперед „заданный“ трансфинит второго класса, $\nu_s=\alpha$), то тогда вопрос о задании трансфинита μ третьего класса есть лишь вопрос о построении вполне упорядоченной системы S и о *расщеплении ее на униформные множества E, $S=\{E\}$*.

IV. *Задание систем S униформных множеств, перенумерованных трансфинитами второго класса*. За математический аппарат, задающий такие системы S, П. С. Новиков берет пространственные решета.

Пусть в трехмерном пространстве $OXYZ$ имеется некоторое пространственное множество C, которое рассматривается как решето. Пересекая его всевозможными вертикальными прямыми (т. е. прямыми, параллельными оси OZ), мы отбираем все те и только те прямые, которые пересекают решето C в вполне упорядоченном множестве точек относительно положительного направления оси OZ. Обозначим через S пересечение всех этих прямых с горизонтальной плоскостью XOY. Ясно, что имеем трансфинитное разложение на конституанты плоского множества точек S:

$$S=S_0+S_1+S_2+\ldots+S_\omega+\ldots+S_\alpha+\ldots\ldots|\Omega, \quad (28)$$

где S_α обозначает совокупность точек M плоскости XOY таких, что перпендикуляр $P_м$ пересекает решето C в вполне упорядоченном множестве типа в точности равного α.

Если всякая непустая конституанта S_α есть униформное множество, мы тогда в праве рассматривать множество S

как систему, составленную из униформных множеств E, т. е. как $S=\{E\}$, и соответственно писать

$$S=E_0+E_1+E_2+\ldots+E_\omega+\ldots+E_\alpha+\ldots\ldots|\,\Omega \quad (29)$$

где мы полагаем

$$E_\alpha=S_\alpha$$

Важно отметить, что *система $S=\{E\}$ униформных множеств E является в разложении* (29) *сразу данной нам в уже перенумерованном виде трансфинитами второго класса.*

Если эта система S униформных множеств есть вполне упорядоченная (в смысле 1, § 33; см. стр. 63), тогда трансфинит μ_s третьего класса является нам заданным, потому что осуществлено не только расщепление системы S на униформные множества, но *даже перенумерование этих множеств трансфинитами второго класса.* Отметим при этом, что это перенумерование, даваемое нам решетом C, может совсем не совпадать с тем перенумерованием вполне упорядоченных систем S униформных множеств, которое мы нашли в II § 33 (см. стр. 64). Но это несовпадение не представляет ни малейшего неудобства, потому что самой важной для нас вещью является *тип* μ_s вполне упорядоченной системы S униформных элементов, который, понятно, совершенно не зависит от манеры перенумеровывать сегмент чисел, отсекаемый типом μ_s.

В дальнейшем мы будем предполагать решето C всегда выбираемым так, чтобы система S была составлена из униформных конституант E и чтобы она была *вполне упорядоченной* в смысле определения, данного в 1 § 33; перенумерование же униформных множеств E мы берем то самое, которое дается решетом C, т. е. разложением (29).

В этом случае тип μ_s системы S можно считать „заданным“, потому что перенумерован сегмент, отсекаемый μ_s помощью трансфинитов второго класса.

Таким образом, *„задание“ трансфинитов третьего класса сводится к заданию трехмерных решет C.*

V. *Выбор основных операций.* Начиная с этого момента, изложение нашего автора, до сих пор бывшее конспективным, становится неясным и нерешительным. После того как был выбран инструмент, вводящий непосредственным образом в математические конструкции трансфиниты 3-го класса, наступает время строить классификацию множеств, идущую по этим трансфинитам. Но для такой классификации необходимы производящие операции и, значит, *необходим выбор* основных, *независимых производящих операций.*

Автор в этом пункте как раз и обнаруживает колебания: отправляясь от одного списка операций, рассматриваемых им как основные, автор в течение своего изложения изменяет этот список, выбрасывая некоторые операции и вводя другие. Поэтому изложение автора в этом чрезвычайно важном и ответственном пункте становится смутным и нерешительным.

Операции, упоминаемые автором на протяжении всей работы в различных ее местах, суть следующие:

Счетное суммирование, разность, гомеоморфные преобразования, проектирование на пространство низшего числа измерений, B-преобразование, дополнение, диагональ, решето, свертывание пространства в плоскость и обратное развертывание плоскости в пространство, соответствие Cantor—Bernstein'a, и, наконец, особая операция, вводимая автором, трансфинитного характера утилизирующая совокупность всех чисел второго класса (и только одни эти числа), и позволяющая относить лебегову бинарному решету Γ определенное пространственное множество; для краткости, мы в дальнейшем будем называть эту операцию: „Ω-отнесением".

Относительно фундаментальной операции „счетное произведение" автор не упоминает совершенно.

Если мы пробежим этот список операций, кстати сказать, не выбираемый автором в этом его виде за основной, то мы немедленно замечаем, что многие операции разложимы на более простые, фигурирующие в этом списке. Так, например, разность сводится к произведению и дополнению по формуле

$$E_1 - E_2 = E_1 \times CE_2$$

Гомеоморфные преобразования суть частный случай B-преобразований. Проектирование на пространство низшего числа измерений есть опять частный случай B-преобразования. Но и само B-преобразование разложимо на последовательные ступени, каждая из которых есть проектирование плоского множества на прямую линию, т. е. совсем элементарная форма проектирования. Диагональ разлагается на произведение, дополнение и проектирование плоского множества на прямую. Решето разлагается на произведение и B-преобразования. Свертывание пространства в плоскость и обратное развертывание плоскости в пространство происходит при помощи одних лишь B-преобразований. Соответствие Cantor-Bernstein'a разложимо на суммирование, разность и B-преобразования; кроме того, оно и не нужно, так как может быть заменено операцией свертывания пространства в плоскость, как это будет нами сделано. Остается лишь одна операция П. С. Новикова: „Ω-отнесение".

Таким образом, в качестве действительно основных операций, следует, по нашему мнению, оставить на первых порах лишь следующие:

1° *Счетное суммирование*;

2° *Счетное произведение*;

3° *Проектирование плоского множества на прямую*;

4° *Дополнение* и

5° Ω-*отнесение*.

Мы помещаем на предпоследнем месте операцию: дополнение, так как она совершенно особенного характера, будучи *абсолютно отрицательной*.

К сказанному мы прибавим следующее примечание: операции 1°, 2°, 3°, 4° и 5° предполагают, что интересуются лишь *линейными* и *плоскими* множествами. Если интересуются как финальным результатом одними лишь *линейными* или *плоскими* множествами, тогда нет надобности выходить и во время промежуточных построений за пределы операций 1°, 2°, 3°, 4°, 5°. Если же желают принимать во внимание и множества, расположенные в пространствах конечного или счетного[1] числа измерений,

[1] Мы не рассматриваем „пространств с числом измерений выше счетного", так как считаем, что привлечение таковых имеет всегда лишь чисто

или если имеют некоторые опасения, что операция 3^0 недостаточна, тогда следует заменить операцию 3^0 операцией 3^* следующего вида:

3^* *Проектирование в пространствах конечного или счетного числа измерений*,

или

3^{**} *B-преобразования с конечным или со счетным числом переменных.*

VI. Общий вид классификации эффективного (*Classification de l'effectif*). Общий вид этой классификации, задуманной П. С. Новиковым, таков:

$$K_0,\ K_1,\ K_2, \ldots K_\omega \ldots\ldots, K_\Omega \ldots K_\alpha \ldots\ldots, \mid \mu^* \qquad (30)$$

где остается до сих пор еще неизвестным, имеем ли мы неравенство $\mu^* < \Omega^*$ или же равенство $\mu^* = \Omega^*$; здесь Ω^* есть „первый трансфинит 4-го класса". В этой классификации *общий член* написан в виде K_α, где a есть: *или* конечное число *или* любой трансфинит второго класса, *или* трансфинитное число третьего класса, любое при $\mu^* = \Omega$, и меньшее числа μ^*, если μ^* есть трансфинит третьего класса.

Важнее всего заметить, что каждый класс K_α составлен из *линейных* множеств, представляющих собой всевозможные разрезы некоторого совершенно определенного плоского множества E_α, прямыми, параллельными оси OY. Таким образом, *всякий класс* K_α состоит из *эффективного continuum'а* (с повторениями) *линейных множеств.*

Итак, классификации (30) эффективных множеств („*ensembles qu'on peut nommer*"), следуя выражению Lebesgue'a, имеют параллельную ей трансфинитную последовательность индивидуальных плоских множеств.

$$E_0,\ E_1,\ E_2, \ldots, E_\omega, \ldots\ldots, E_\Omega \ldots E_\alpha, \ldots\ldots \mid \mu^* \qquad (31)$$

и задача сводится теперь к фактическому построению плоских множеств трансфинитной последовательности (31) по-

---

вербальный интерес (если в *финальном* результате нет терминов этих пространств). В особенности же в Дескриптивной теории функций это представило бы крупную методологическую ошибку и явный circulus vitiosus, так, вся цель Дескриптивной теории функций как-раз и состоит в исследовании кардинальной проблемы: *что такое несчетные множества и как они возможны*?

мощью тех или других производящих операций, отправляясь от начального множества E_0.

VII. Выбор начального множества. За начальное множество E_0 мы берем плоское множество, универсальное по отношению ко всем линейным проективным множествам и всем остальным, которые получаются из них помощью операций 1°, 2° и 3°, повторенным *конечное или счетное число раз.* Такое плоское множество E_0 определить индивидуально не представит ни малейшего затруднения, и мы больше к этому вопросу не станем возвращаться.

VIII. Случай первый. Число a есть первого рода: $a = a^* + 1$. Мы предполагаем классификацию (30) продвинутой вплоть до класса K_{a^*}, который уже фактически имеем. Задача сводится к определению следующего класса K_{a^*+1}. Итак, мы предполагаем, что имеем плоское определенное множество E_{a^*}. Мы одновременно с плоским множеством E_{a^*}, которым мы уже обладаем, рассматриваем дополнительное плоское множество CE_{a^*}, и образуем всевозможные линейные множества, получаемые из линейных вертикальных множеств, входящих в состав E_{a^*} и CE_{a^*}, помощью операций 1°, 2° и 3°, повторенных *конечное или счетное число раз.* Легко теперь построить определенное плоское множество U универсальное по отношению к образованным линейным множествам.

Мы не станем останавливаться на фактическом построении множества U; это построение не представляет труда. Полагая

$$E_{a^*+1} = U,$$

мы имеем классификацию (30) получившей новый класс $Ka, a = a^* + 1$.

IX. Случай второй. Число a есть второго рода. Случай этот есть самый интересный. Для того, чтобы овладеть трудностями, с ним связанными, мы одновременно с трансфинитной последовательностью (31) плоских множеств рассматриваем так же точно последовательность

$$W_0, \ W_1, \ W_2, \ldots W_{\omega 1}, \ldots \ldots W_\Omega, \ldots \ W_a \ldots \ldots | \mu^* \qquad (32)$$

составленную из четырехмерных индивидуальных множеств, лежащих в пространстве $O'X'Y'Z'T'$ и таких, что пересечение четырехмерного множества W_α трехмерными многообразиями $t'=t'_0$ дает всегда трехмерное множество $(W_\alpha)_{t'_0}$ получающееся из сечения плоского множества E некоторою прямою $x=x_0$, помощью B-преобразования, и обратно, всякое B-преобразование вертикального разреза плоского множества в трехмерное получается, пересекая четырехмерное множество W_α надлежаще подобранным трехмерным многообразием $t'=t'_0$.

Иначе говоря, W_α *есть универсальное четырехмерное множество для всех B-преобразований линейных вертикальных сечений плоского множества* E_α *в трехмерные множества.*

Введя трансфинитную последовательность (32) четырехмерных универсальных множеств W_α, мы возвращаемся к случаю предельного числа α.

Мы предположили, что наша классификация (30) доведена до предельного класса K_α, *причем самый этот класс еще не определен.* Следовательно, мы уже имеем определенными *плоские* множества

$$E_0,\ E_1,\ E_2, \ldots, E_\omega \ldots\ldots E_\Omega, \ldots E_\beta, \ldots\ldots |\, \alpha$$

и *четырехмерные* множества

$$w_0,\ w_1,\ w_2, \ldots, w_\omega, \ldots\ldots, w_\Omega, \ldots, w_\beta \ldots\ldots |\, \alpha$$

Число α есть *предельное,* и здесь возможны два случая:

Случай 1. Нет такого трехмерного множества $(W_\beta)_{t'_0}$, $\beta<\alpha$, которое, будучи решетом в трехмерном пространстве $OX'Y'Z'$, дало бы на плоскости $X'O'Y'$ вполне упорядоченную систему S униформных множеств типа μ_s в точности равного α, т. е.

$$\mu_S=\alpha$$

Если этот случай имеет место, то мы просто останавливаем наше построение и, полагая

$$\mu^*=\alpha,$$

считаем классификацию законченной на этом предельном трансфините μ^*.

Случай 2. Имеется такое W_β, $\beta<\alpha$, и такое действительное число t'_0, что трехмерное множество $(W_\beta)_{t'_0}$, рассматриваемое как решето в пространстве $OX'Y'Z'$, дает на плоскости $X'OY'$ вполне упорядоченную систему S униформных множеств, тип, который в точности равен a, т. е.

$$\mu_S = a$$

Если этот случай представляется нам, мы начинаем с того, что среди индексов β с таким свойством, мы берем *наименьший*; пусть он равен $\widetilde{\beta}$. Делаем дальше такое построение чисел t'_0 таких, что решето $(W_{\widetilde{\beta}})_{t'_0}$ дает вполне упорядоченную систему S униформных множеств типа в точности равного a, их, вообще говоря, имеется бесчисленное множество. Пусть t'_0 есть одно из них. В этом случае мы применим к лебегову бинарному решету Γ, лежащему в вертикальной плоскости UOV триедра $OUVW$ операцию „Ω-отнесения", введенную П. С. Новиковым.

Вот эта операция. Бинарное решето Γ Lebesgue'а, лежащее в плоскости UOV, определяет в интервале $(0 < и < 1)$, находящемся на оси OU, аналитическое дополнение $\mathscr{E}$, разлагающееся на $\aleph_1$ конституант

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots + \mathscr{E}_\omega + \ldots + \mathscr{E}_\gamma + \ldots\ldots \mid \Omega$$

причем *ни одна из этих конституант не есть пустая.*

С другой стороны, пространственное решето $(W_{\widetilde{\beta}})_{t'_0}$ дает нам *вполне определенное* перенумерование всех трансфинитов β, предшествующих рассматриваемому трансфиниту a

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, \omega, \ldots\ldots, \Omega,\ \ldots \beta, \ldots\ldots \mid a$$

помощью одних только трансфинитов второго класса

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, \omega, \ldots\ldots \mid \Omega$$

потому что решето $(W_{\widetilde{\beta}})_{t'_0}$ дает вполне определенную систему S униформных множеств, занумерованных трансфинитами второго класса, причем система S есть вполне упорядоченная и имеет a своим типом.

Но, раз сегмент чисел

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, \omega, \ldots\ldots \Omega, \ldots, \beta, \ldots\ldots \mid a$$

отсекаемый числом a, перенумерован трансфинитами второго класса, то точно так же перенумерована *подобная ей* последовательность плоских множеств

$$E_0, E_1, E_2, \ldots, E_\omega, \ldots\ldots, E_\Omega, \ldots, E_\beta, \ldots\ldots, | \alpha$$

нами уже определенных.

Пусть

$$\beta = \varphi(\gamma)$$

есть рассматриваемое перенумерование: здесь γ есть любое из чисел конечных и трансфинитов второго класса

$$0, 1, 2, \ldots \omega, \ldots\ldots, | \Omega, \quad \gamma < \Omega$$

и β есть соответствующее число сегмента чисел

$$0, 1, 2, \ldots, \omega, \ldots\ldots, \Omega, \ldots, \beta, \ldots\ldots, 1$$

усеченного числом α. Каждому числу $\gamma < \Omega$ отвечает определенное число $\beta < \alpha$, и обратно, каждому такому числу β отвечает одно и только одно число $\gamma, \gamma < \Omega$.

Это дает нам возможность выполнить операцию „Ω-отнесения".

Для этого поступим так: *через всякую точку u_0 конституанты $\mathcal{E}_\gamma$ проведем плоскость перпендикулярную к оси OU и поместим на этой плоскости плоское множество $E_{\varphi(\gamma)}$.*

Если мы это проделаем для *каждой* конституанты $\mathcal{E}_\gamma$, мы будем иметь в пространстве $OUVW$ пространственное множество, которое мы обозначим через $H_{t'_0}$; индекс t'_0 указывает на то, что не нужно забывать о том, что все построение проделано помощью решета $(W_\beta^\gamma)_{t'_0}$, определенного, в свою очередь, единственно знанием действительного числа t'_0.

Полученное трехмерное множество $H_{t'_0}$ обладает тем замечательным свойством, что:

a) *не пересекается плоскостью $u = u_0$, если u_0 не принадлежит к аналитическому дополнению $\mathcal{E}$;*

b) *если точка u_0 принадлежит к аналитическому дополнению $\mathcal{E}$, плоскость $u = u_0$ наверное пересекает пространственное множество $H_{t'_0}$ в точности по одному из плоских множеств*

$$E_0, E_1, E_2, \ldots, E_\omega, \ldots\ldots, E_\Omega, \ldots, E_\beta, \ldots\ldots | \alpha$$

c) *каждое из этих плоских множеств* E_β *может быть получено как пересечение множества* $H_{t'_0}$ *плоскостью* $u=u_0$ *при надлежащем подборе действительного числа* u_0.

Установив это, свернем трехмерное пространство $OUVW$ в плоскость $U'OW'$ помощью преобразования Peano

$$u=f(u'),\ v=g(u'),\ w=w'.$$

Ясно, что пространственное множество H'_{t_0} свернется в плоское множество $\breve{H}_{t'_0}$, обладающее тем замечательным свойством, что

$\breve{a}$) или оно совсем не пересекается вертикальной прямой $u'=u'_0$;

$\breve{b}$) или оно пересечется прямой $u'=u'_0$ по одному из вертикальных сечений некоторого плоского множества E_β $(\beta<a)$;

$\breve{c}$) всякое прямолинейное вертикальное сечение любого из плоских множеств E_β $(\beta<a)$, может быть получено пересечением плоского множества $\breve{H}_{t'_0}$ вертикальной прямой.

Короче говоря, плоское множество $\breve{H}'_{t_0}$ есть *универсальное по отношению ко всем вертикальным сечениям всех плоских множеств*

$$E_0,\ E_1,\ E_2,\ldots,E_\omega,\ldots\ldots E_\Omega,\ldots,E_\beta,\ldots\ldots|\,a.$$

Теперь нам осталось лишь освободиться от числа t'_0, что достигается следующим образом: рассмотрим пространство $OU''V''T'$ трех измерений и проведем через точку t'_0, взятую на оси OT' плоскость перпендикулярную к этой оси. Если точка t'_0 такова, что трехмерное решето $W(\tilde{\beta})'_{t_0}$, которое было нами определено выше, или не дает вполне упорядоченной системы S униформных множеств, или, хотя и дает такую систему S, но S не имеет своим типом числа a, тогда на этой плоскости $t=t'_0$, проведенной в пространстве $OU''V''T$, мы не помещаем ничего. Если же точка t'_0 такова, что трехмерное решето $(W_{\tilde{\beta}})'_{t_0}$ даст вполне упорядоченную систему S униформных множеств, имеющую своим типом трансфинит a, мы поместим в этом случае на плоскости $t'=t'_0$ построенное нами выше плоское множество $H_{t'_0}$.

Ясно, что этот процесс даст в трехмерном пространстве $OU''V''T'$ уже единственное и совершенно определенное, не зависящее ни от каких параметров, пространственное множество, которое мы обозначим через $\mathfrak{M}$.

Очевидно, что $\mathfrak{M}$ есть универсальное по отношению ко всем вертикальным сечениям всех плоских множеств

$$E_0,\ E_1,\ E_2, \ldots,\ E_\omega, \ldots\ldots E_\Omega, \ldots, E_\beta, \ldots\ldots \mid \alpha$$

Но множество $\mathfrak{M}$ есть пространственное; оно покоится в пространстве $OU''V''T'$. Свернем это трехмерное пространство в плоскость XOY преобразованием Peano

$$u''=f(x),\ v''=g(x),\ t'=y.$$

Ясно, что после такого свертывания трехмерного пространства $OU''V''T'$ в плоскость XOY пространственное множество $\mathfrak{M}$ свернется в плоское множество $\mathfrak{N}$, универсальное по отношению ко всем вертикальным сечениям всех плоских множеств

$$E_0,\ E_1,\ E_2, \ldots, E_\omega, \ldots\ldots,\ E_\Omega, \ldots,\ E_\beta, \ldots\ldots \mid \alpha.$$

Вот, это-то плоское множество $\mathfrak{N}$ мы и обозначим через E_α и скажем, что оно получено операцией *„Ω-отнесения“* из всех предыдущих множеств E_β, где $\beta<\alpha$.

Таким образом, трансфинитная последовательность (31) индивидуальных плоских множеств

$$E_0,\ E_1,\ E_2, \ldots,\ E_\omega, \ldots\ldots,\ E_\Omega, \ldots,\ E_\alpha, \ldots\ldots \mid \mu^* \qquad (31)$$

получает вполне определенное плоское множество E_α, где α *предельное число*, и, следовательно, беспрепятственно определяется член за членом дальше вплоть до предельного трансфинита μ^*, которого перешагнуть уже невозможно.

И вместе с трансфинитною последовательностью (31) является определенной и вся „классификация эффективного“

$$K_0,\ K_1,\ K_2, \ldots,\ K_\omega, \ldots\ldots,\ K_\Omega, \ldots,\ K_\alpha, \ldots\ldots \mid \mu^* \quad (30)$$

К сожалению, без углубленного анализа остается неизвестным равно ли число μ^* „первому трансфиниту четвертого класса“ $\mathring{\Omega}$ или μ^* меньше его.

X. *Точка зрения П. С. Новикова.* Для того, чтобы точнее изложить взгляд автора на значение классификации эффективного, лучше всего предоставить ему самому слово.

Мы цитируем дословно окончание его диссертации:

„... Итак, мы построили классы множеств K_α; каждый класс содержит континуум множеств, и трансфинитные числа α принадлежат 1-му, 2-му и 3-му классу. Является вопрос представляет ли совокупность трансфинитов α множество всех чисел 1-го, 2-го и 3-го класса, или же составляет часть его? Иначе говоря, будет ли наименьший трансфинит, превышающий все α, который мы назовем μ^*, меньше Ω_2, или равен ему? Вопрос этот очень труден. Мы не имеем эффективного соответствия, хотя бы такого, в котором разным точкам континуума отвечают не обязательно различные множества. Поэтому, выход из системы построенных множеств затрудняется тем, что в этих условиях не удастся приложить диагональ Кантора. С помощью аксиомы Цермело можно показать, что построенные множества не исчерпывают всех точечных множеств.

Доказательство того же положения без аксиомы Цермело провести не удается, и ***поэтому относительно построенной совокупности множеств законна гипотеза о том, что эта совокупность множеств содержит все вообще множества, которые можно построить эффективно в смысле Лебега.***

Заметим, что разрешение вопроса о соотношении трансфинитов μ^* и Ω_2 приведет к важным результатам. Если будет доказано, что $\mu^* < \Omega_2$, тем самым решен один из вопросов, на которые указал Н. Н. Лузин: существует ли хоть одно из множеств мощности $\aleph_1$ не являющееся в то же время аналитическим дополнением?

Из допущения $\mu^* < \Omega$ вытекает, что действительно существует такое множество из $\aleph_1$ точек, которое не является аналитическим дополнением и даже больше: тогда можно утверждать, что найдется множество точек мощности $\aleph_1$ не проективное вообще“.

XI. *Критические замечания к „классификации эффективного“, предложенной П. С. Новиковым.* Откладывая углубленный и детальный анализ интересной попытки П. С. Новикова „классифицировать эффективное“, до появления более осязательного материала, мы в настоящее время ограничимся лишь краткими замечаниями по поводу данного автором первого наброска этой классификации.

Этот набросок очень неполон и являет собой лишь скелет классификации эффективного или точнее: программу работы в этом направлении. Автор в своем устремлении остается верен идее Lebesgue'a о ценности предпринять изучение множеств *„qu'on peut nommer"*. В этом заключается неоспоримая и очень большая заслуга автора.

О самом же существе этой попытки судить сейчас невозможно: материал очень недостаточен; по имеющемуся скелету сказать можно лишь очень немного да и то лишь с известною степенью вероятности.

Существенным нам представляется следующее:

В математической литературе не раз проскальзывала мысль о составлении такого списка операций, чтобы *минимальная* система множеств, содержащая отрезки и инвариантная относительно операций этого списка, оказалась бы неспособной к дальнейшему расширению диагональю Cantor'a. Я уже указал выше (см. V, § 33 *Выбор основных операций*), что самая диагональ Cantor'a разлагается на следующие операции: произведение, дополнение и проектирование на прямую так, что здесь особенно трудного момента нет никакого. Но диагональ Cantor'a предполагает наличие эффективно названного плоского множества, т. е. наличие выполненного *„application sur le continu"* (Lebesgue). И весь центр тяжести проблемы именно в этом *application sur le continu*. Несомненно, что это есть *какая-то операция*, которую мы иногда умеем проделать; иногда этого умения у нас нет. Вообще говоря, этот пункт наиболее загадочный во всей Дескриптивной теории функций; напомним, что сам Lebesgue оказался в силах построить эффективно функцию, не входящую в классификацию Baire'a, лишь тогда, когда ему удалось осуществить application sur le continu семейства всех функций классификации Baire'a. До Lebesgue'a у нас не было такого умения. Если какое-нибудь семейство S множеств допускает application sur le continu, пусть даже с повторениями, т. е. с наличием тождественных экземпляров, тогда мы говорим, что семейство S имеет *эффективную мощность continuum'a* (*кратную*, если учитывать повторения). Если доказано, что семейство S допускает вообще application sur le continu; но назвать его не умеем, тогда мы говорим, что S имеет *неэффективную мощность continuum'а*.

Но если установлено, что семейство S совсем не допускает никакого application sur le continu, тогда мы уже говорим, что *семейство S имеет мощность выше continuum'а*.

Таким образом, искать такого списка операций, чтобы минимальная система, содержащая отрезки и инвариантная по отношению ко всем операциям этого списка, оказалась бы неспособной к расширению общей (т. е. всякой) диагональю Cantor'а — это значит требовать, чтобы в этом списке фигурировало в самом общем виде *application sur le continu* как операция. Так обычно это всегда и делалось, implicite или explicite. И так как свойства этой операции загадочны, то вполне естественно, что дело с этими рассмотрениями не подвигалось.

Теперь в списке П. С. Новикова диагональ Cantor'а входит полностью, хотя и в раздробленном состоянии: я уже указал выше (V, § 33), что диагональ Cantor'а составляется у автора из операций 1°, 2°, 3° и 4°. Но гораздо важнее отметить, что implicite предполагается осуществленным *application sur le continu, выполненный B-преобразованиями*. Понятно поэтому, что минимальное семейство (Σ) автора, содержащее все отрезки и инвариантное по отношению к операциям 1°, 2°, 3° (или 3*, или 3**) и 4° автора оказывается неспособным к расширению диагональю Cantor'а, предшествуемой application sur le continu, сделанным B-преобразованиями. Таким образом, семейство (Σ) П. С. Новикова *все в целом* не допускает application sur le continu, сделанного B-преобразованием, и потому *такая* (частная) диагональ Cantor'а, в самом деле, не даст никакого расширения. Но отсюда еще очень далек вывод, что *всякое* application sur le continu должно осуществляться лишь B-преобразованиями: минимальное семейство (Σ) автора прекрасно может оказаться допускающим *другое* application sur le continu, которое уже не осуществляется B-преобразованиями, но каким-нибудь иным способом. Ведь, было время, когда (стадия до Lebesgue'а) думали, что одни лишь множества измеримые B, и имеют индивидуальное существование, или что (стадия до Hermite) всякое иррациональное число есть непременно алгебраическое.

При этом мы оставляем в стороне операцию 5° „Ω-отнесение“, введенную автором: к ее природе мы еще возвратимся.

Пока же нас интересует следующий пункт: мы видели (IX, § 33), что для трансфинитной последовательности (31) плоских множеств

$$E_0, E_1, E_2, \ldots, E_\omega, \ldots\ldots, E_\Omega, \ldots, E_\alpha, \ldots\ldots \mid \mu^* \quad (31)$$

имеется коррелятивная к ней трансфинитная последовательность (32) четырехмерных множеств

$$W_0, W_1, W_2, \ldots, W_\omega, \ldots\ldots W_\Omega, \ldots W_\alpha, \ldots\ldots \mid \mu^* \quad (33)$$

причем всякое четырехмерное W_α получается из соответствующего плоского E_α некоторым преобразованием, как и обратно: из W_α получается E_α обратным преобразованием.

Мы видели, что если α есть число *предельное*, то плоское множество E_α получается применением операции „Ω-отнесения“ из некоторого предыдущего четырехмерного множества $W_{\tilde\beta}$ $(\tilde\beta < \alpha)$, следующим образом: пересекая $W_{\tilde\beta}$ трехмерным многообразием $t' = t'_0$, где t'_0 надлежаще подобрано (предполагая, что оно имеется), получают трехмерное решето $(W_{\tilde\beta})'_{t_0}$, дающее нужную нам вполне упорядоченную систему S униформных множеств *типа* μ_s *в точности равного* α, $\mu_s = \alpha$.

Эта система S нам нужна не сама по себе, а только тем, что дает ценное для дальнейшего перенумерования трансфинитных чисел, предшествующих числу α помощью трансфинитных чисел *второго* класса.

Пользуясь же этим перенумерованием, мы строим плоское множество E_α, где α есть предельное.

Резюмируя сказанное мы видим, что построение плоского множества E_α удается благодаря тому, что в четырехмерном множестве $W_{\tilde\beta}$ существует такой разрез трехмерным многообразием $t' = t'_0$, который дает решето типа α.

Введем теперь определение: мы скажем, что четырехмерное множество W_β есть *множество с ограниченными* *типами*, если всякий его разрез $(W_\beta)_{t'}$ или не дает никакого типа, или дает тип не выше некоторого фиксированного трансфинита *третьего* класса ϑ ($\vartheta < \Omega_2$). В противном случае множество W_β есть *множество с неограниченными типами*.

Мы теперь утверждаем, что **необходимым условием для того, чтобы** $\mu^* = \Omega_2$, **является существование четырехмерного множества** W_β **с неограниченными типами.**

Действительно, пусть каждое W_β есть множество с ограниченными типами; более точно, пусть типы разрезов множества W_β не превосходят числа третьего класса ϑ_β. Обозначим через θ_β наименьшее из чисел, превосходящих все числа

$$\vartheta_0,\ \vartheta_1,\ \vartheta_2, \ldots,\ \vartheta_\omega, \ldots\ldots,\ \vartheta_\Omega, \ldots \mid \beta.$$

Ясно, что θ_β есть трансфинит третьего класса или ниже, и что θ_β не убывает с возрастанием индекса β. Имеются две возможности.

Если θ_β *не возрастает до* Ω_2, тогда $\theta_\beta < \theta$, где θ есть фиксированный трансфинит третьего класса. Ясно, что тогда множество E_θ уже нельзя определить, и $\mu^* < \theta$, т. е. $\mu^* < \Omega_2$.

Если θ_β *возрастает с* β *до* Ω_2, то мы полагаем

$$\theta_\beta = \varphi(\beta).$$

В этом случае, положив

$$\beta_1 = \varphi(\beta), \quad \beta_2 = \varphi(\beta_1), \quad \beta_3 = \varphi(\beta_2), \ldots, \quad \beta_{n+1} = \varphi(\beta_n), \ldots$$

мы имеем

$$\beta < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \ldots < \beta_n < \ldots$$

возрастающую цепочку типа ω чисел третьего класса, предел которой γ, $\lim \beta_n = \gamma$ есть трансфинитное число третьего класса.

Ясно, что типы разрезов множеств

$$W_0,\ W_1,\ W_2, \ldots,\ W_\omega, \ldots\ldots,\ W_\Omega, \ldots \mid \gamma$$

меньше γ, т. е. процесс П. С. Новикова должен остановиться, и мы имеем $\mu^* < \gamma < \Omega_2$.

Итак,

необходимым условием для того, чтобы $\mu^* = \Omega_2$, является существование множества W_β с неограниченными типами.

Это условие является и *достаточным,* если слегка видоизменить построение „классификации эффективного" П. С. Новикова.

Заметим, что пока еще неизвестно, ограничено или нет даже четырехмерное множество W универсальное по отношению к всевозможным трехмерным решетам, определяющим плоские аналитические множества. Если бы такие неограниченные множества W нашлись, они, вероятно, могли бы сыграть ту же самую роль, какую играет плоское решето, определяющее аналитическое множество, *неизмеримое* B.

Сделаем последнее замечание: если α есть число 1-го рода $\alpha = \alpha^* + 1$, тогда плоское множество E_{α^*+1} определяется через предыдущее плоское множество E_{α^*} помощью суммирования, произведения и B-преобразований все это в счетном числе. Следовательно, переход от E_{α^*} к E_{α^*+1} осуществляется непосредственно, т. е. без всяких трансфинитных чисел.

Рассмотрим теперь операцию „Ω-отнесения". Она выполняет переход от множества $E_{\bar\beta}$ к E_α, где α есть предельное число, и где четырехмерное множество $W_{\bar\beta}$ допускает трехмерный разрез $(W_{\bar\beta})_{t'_0}$, дающий систему S униформных множеств, вполне упорядоченную и типа в точности равного α.

Эта операция по внешнему виду представляется существенно трансфинитной. Но ничто не доказывает, что она, в самом деле, такова и что трансфинитное здесь не может быть исключено хотя бы одним из тех методов, которые мы указали в начале нашего доклада. Если это исключение, в самом деле, можно сделать, переход от $E_{\bar\beta}$ к E_α будет также нетрансфинитен, как переход от E_{α^*} к E_{α^*+1}. В этом случае вся классификация эффективного П. С. Новикова будет состоять из множеств, образуемых каждое в отдельности нетрансфинитным процессом. Если прибавить сюда, что вероятен тот факт, что уже первое четырехмерное множество W_0 есть множество *неограниченное*, и, значит, всегда

$\bar{\beta}=0$, то вся классификация П. С. Новикова будет развертываться лишь из начального члена E_0.

В этом случае $\mu^*=\Omega_2$ и вся классификация эффективного, вероятно, допустит application sur le continu и, значит, не включит в себя всего эффективного. Если же исключение трансфинитного невозможно, то вся классификация представит пример (второй после Lebesgue'а) *трансфинитного процесса со связанными операциями*, о которых мы говорили раньше.

Таким образом, случай $\mu^*<\Omega_2$ представляется мало вероятным. Напротив, имеется большая вероятность наличия *application sur le continu* всех множеств, входящих в „классификацию эффективного“.

Техн. редактор *П. Королев*

Сдано в набор 27/VIII 1935 г.
Подписано к печати 3/XI 1935 г.
Формат бум. 62×94/16. 5 1/2 п. л.
В печ. листе 35840 зн. Тираж
1500 экз. Уполном. Главлита
В-28745. АН № 56.
Заказ № 2863.

1-я Образцовая типография
Огиза РСФСР треста „Полиграфкнига“. Москва, Валовая, 28.